数学　復習問題（第 5 回）

2019.5.20 担当：河田

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名　　模　範　解　答

※　5 月 24 日(金)17 時までに、河田研究室(508)まで提出すること。
※　途中の式や思考過程はそのままにしておくこと。

1.　以下の各式について、y を x と z でそれぞれ偏微分せよ。

①　$y = 2xz^2$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \cdot 2z^2x^{1-1} = 2z^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2 \cdot 2xz^{2-1} = 4xz$$

②　$y = x(z-4)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}(z-4) = z-4$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 \cdot x(z^{1-1}) = x$$

③　$y = 2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}-1}z^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}$$

④　$y = (2x^3 + 5z^2)^4$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4 \cdot (2x^3+5z^2)^3 \cdot 3 \cdot 2x^{3-1} = 24x^2(2x^3+5z^2)^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 4 \cdot (2x^3+5z^2)^3 \cdot 2 \cdot 5z^{2-1} = 40z(2x^3+5z^2)^3$$

2. 生産量を決める要素として、資本(K)と労働量(L)がある。いま、生産量(Y)が資本と労働量の関数として、$\mathrm{Y} = \mathrm{K}^{\frac{3}{4}}\mathrm{L}^{\frac{1}{4}}$とあらわされるとする。

(1) このとき、資本の限界生産力(生産量を資本で偏微分したもの)と、労働の限界生産力(生産量を労働量で偏微分したもの)を求めよ。

資本の限界生産力は

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{3}{4} \cdot K^{\frac{3}{4}-1}L^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

労働の限界生産力は

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{4} \cdot K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

(2) このとき、生産者にとって、最適生産点(ある量を生産するとき、その費用が最小となる資本と労働量の組み合わせ)は

$$\frac{\text{資本の限界生産力}}{\text{資本の価格}} = \frac{\text{労働の限界生産力}}{\text{労働の価格}}$$

が成り立つときである。資本の価格が 3、労働の価格が 16 であるとき、生産者が Y を 40 だけ生産するのに最適な資本(K)の大きさはいくらになりますか。

$$\frac{\text{資本の限界生産力}}{\text{資本の価格}} = \frac{\text{労働の限界生産力}}{\text{労働の価格}}$$

なので、

$$\frac{\frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}}{3} = \frac{\frac{1}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{64}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

よって、$16\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$であり、

$$16\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{16L^{\frac{1}{4}}}{K^{\frac{1}{4}}} = \frac{K^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{3}{4}}} \Leftrightarrow 16L^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}} = K^{\frac{3}{4}} \cdot K^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 16L = K$$

となる。

$$40 = (16\mathrm{L})^{\frac{3}{4}}\mathrm{L}^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 40 = 16^{\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}\mathrm{L}^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 40 = 8\mathrm{L} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 5$$

よって、最適な資本(K)の大きさは、$\mathrm{K} = 16L$より、$16 \times 5 = 80$となる。