数学　復習問題（第 4 回）

2019.5.13 担当：河田

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名　　模　範　解　答＿＿＿＿＿＿

※　5 月 17 日(金)17 時までに、河田研究室(508)まで提出すること。
※　途中の式や思考過程はそのままにしておくこと。

1. 次の各式について、y を x で微分しなさい。

① $y = 3x^2 - 4x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3x^{2-1} - 1 \cdot 4x^{1-1} = 6x - 4$$

② $y = 2x^3 - 5x^2 + 20$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot 5x^{2-1} = 6x^2 - 10x$$

③ $y = 3x^4 - 2x^2 + 6x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^{4-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 \cdot 6x^{1-1} = 12x^3 - 4x + 6$$

④ $y = x^3 - 5x + 8$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^{3-1} - 1 \cdot 5x^{1-1} = 3x^2 - 5$$

2. 次の 2 次関数を最小または最大にするxの値と、最小値または最大値を微分を用いて求めなさい。

① $y = x^2 - 4x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} - 1 \cdot 4x^{1-1} = 2x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

よって$x = 2$のとき、最小値$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$をとる。

② $y = x^2 + 6x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 6x^{1-1} = 2x + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

よって$x = -3$のとき、最小値$y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 2 = -7$をとる。

③ $y = -x^2 - 4x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot x^{2-1} - 1 \cdot 4x^{1-1} = -2x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

よって$x = -2$のとき、最大値$y = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = 5$をとる。

④ $y = -2x^2 + 5x - 4$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot 2x^{2-1} + 1 \cdot 5x^{1-1} = -2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow -4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

よって$x = \frac{5}{4}$のとき、最大値$y = -2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 4 = -\frac{7}{8}$

をとる。

3.　次の3次関数を極小・極大にするxの値と、極小値・極大値を求めなさい。

①　$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 3・x^{3-1} - 2・6x^{2-1} + 1・9x^{1-1} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1,3$$

x		1		3	
$\frac{dy}{dx}$	+	0	−	0	+
y	↗	8	↘	4	↗

よって$x = 1$のとき、極大値$y = 1^3 - 6・1^2 + 9・1 + 4 = 8$をとり、
$x = 3$のとき、極小値$y = 3^3 - 6・3^2 + 9・3 + 4 = 4$をとる。

②　$y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = -3・\frac{2}{3}x^{3-1} + 2・3x^{2-1} - 1・4x^{1-1} = -2x^2 + 6x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.2$$

x		1		2	
$\frac{dy}{dx}$	−	0	+	0	−
y	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘

よって$x = 1$のとき、極小値$y = -\frac{2}{3}・1^3 + 3・1^2 - 4・1 + 2 = \frac{1}{3}$をとり、
$x = 2$のとき、極大値$y = -\frac{2}{3}・2^3 + 3・2^2 - 4・2 + 2 = \frac{2}{3}$をとる。

4.　企業の生産するある商品の利潤(もうけ)を考えると、利潤(π)＝売上－総費用と求められる。
ここで、売上は、価格×数量(q)として求められる。
総費用(C)が、数量(q)の関数として、$C = q^3 - 6q^2 - 5q - 120$としてあらわされ、この商品の価格が10であるとき、この商品の利潤を最大にする生産量(q)と、そのときの利潤(π)を求めよ。

利潤(π)＝売上－総費用なので、

$$\pi = 10q - (q^3 - 6q^2 - 5q - 120) = -q^3 + 6q^2 + 15q + 120$$

である。これを微分すると、

$$\frac{d\pi}{dq} = -3・q^{3-1} + 2・6q^{2-1} + 1・15q^{1-1} = -3q^2 + 12q + 15$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow -3q^2 + 12q + 15 = 0 \Leftrightarrow -3(q+1)(q-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -1,5$$

q		−1		5	
$\frac{d\pi}{dq}$	−	0	+	0	−
π	↘	112	↗	220	↘

よって$q = -1$のとき、
極小値$y = -(-1)^3 + 6・(-1)^2 + 15・(-1) + 120 = 112$をとり、
$q = 5$のとき、極大値$y = -5^3 + 6・5^2 + 15・5 + 120 = 220$をとる。

この商品は、$q = 5$のとき、最大利潤220をとる。