数学　補足資料（練習問題の解答）

2019.5.20 担当：河田

＜第 5 回　微分の計算その 2･偏微分＞

［予習問題の確認］

1.　以下の各式について、y を x で微分せよ。

①　$y = 4x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot 4x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{1}{3} \cdot 9x^{\frac{1}{3}-1} = 6x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{2}{3}}$$

②　$y = (3x^2 - 5x + 2)^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (3x^2 - 5x + 2)^{4-1} \cdot \left(2 \cdot 3x^{2-1} - 5\right) = 4(6x - 5)(3x^2 - 5x + 2)^3$$

［練習問題］

2.　以下の各式について、y を x と z でそれぞれ偏微分せよ。

②　$y = 2x^3z + 4$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3 \cdot 2zx^{3-1} = 6x^2z$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 \cdot 2x^3z^{1-1} = 2x^3$$

④　$y = 2x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot 2z^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2}{3} \cdot 2x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{3}}$$

⑤　$y = (3x^2 + 2z^2)^3$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3 \cdot (3x^2 + 2z^2)^{3-1} \cdot \left(2 \cdot 3x^{2-1}\right) = 18x(3x^2 + 2z^2)^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 3 \cdot (3x^2 + 2z^2)^{3-1} \cdot \left(2 \cdot 2z^{2-1}\right) = 12z(3x^2 + 2z^2)^2$$

3. 生産量を決める要素として、資本(K)と労働量(L)がある。いま、生産量(Y)が資本と労働量の関数として、$\mathrm{Y} = \mathrm{K}^{\frac{1}{3}}\mathrm{L}^{\frac{2}{3}}$とあらわされるとする。

(1) このとき、資本の限界生産力(生産量を資本で偏微分したもの)と、労働の限界生産力(生産量を労働量で偏微分したもの)を求めよ。

資本の限界生産力は

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{3} \cdot K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

労働の限界生産力は

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{2}{3} \cdot K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

(2) このとき、生産者にとって、最適生産点(ある量を生産するとき、その費用が最小となる資本と労働量の組み合わせ)は

$$\frac{\text{資本の限界生産力}}{\text{資本の価格}} = \frac{\text{労働の限界生産力}}{\text{労働の価格}}$$

が成り立つときである。資本の価格が 2、労働の価格が 1 であるとき、生産者が Y を 10 だけ生産するのに最適な資本(K)の大きさはいくらになりますか。

$$\frac{\text{資本の限界生産力}}{\text{資本の価格}} = \frac{\text{労働の限界生産力}}{\text{労働の価格}}$$

なので、

$$\frac{\frac{1}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{\frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{6}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

よって、$\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$であり、

$$\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{L^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = \frac{4K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow L^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}} \cdot K^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow L = 4K$$

となる。

$$10 = \mathrm{K}^{\frac{1}{3}}(4\mathrm{K})^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 10 = 4^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}\mathrm{K}^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 10 = 16^{\frac{1}{3}}\mathrm{K} \Leftrightarrow K = \frac{10}{\sqrt[3]{16}}$$

よって、最適な資本(K)の大きさは、$\frac{10}{\sqrt[3]{16}}$となる。

※ 元の問題は、生産関数が$\mathrm{Y} = \mathrm{K}^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{\frac{1}{3}}$でした。