数学　配布資料

2019.5.20 担当：河田

＜第 5 回　微分の計算その 2･偏微分＞

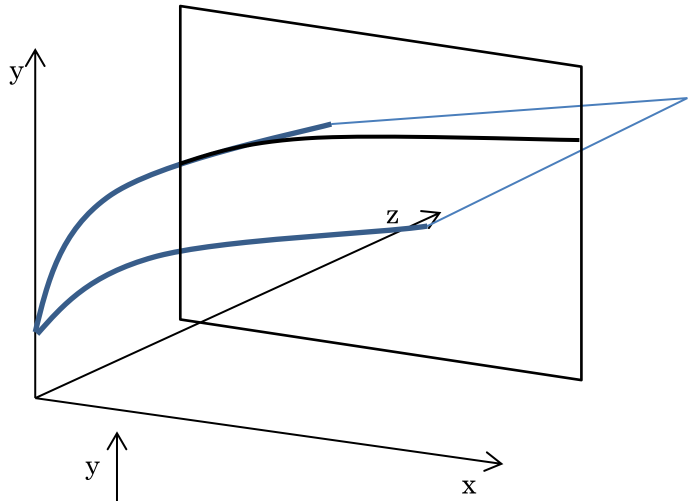
［予習問題の確認］

1. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

　① $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{1}{3}}$

　② $y = (3x^2 - 5x + 2)^4$

［新しい概念］

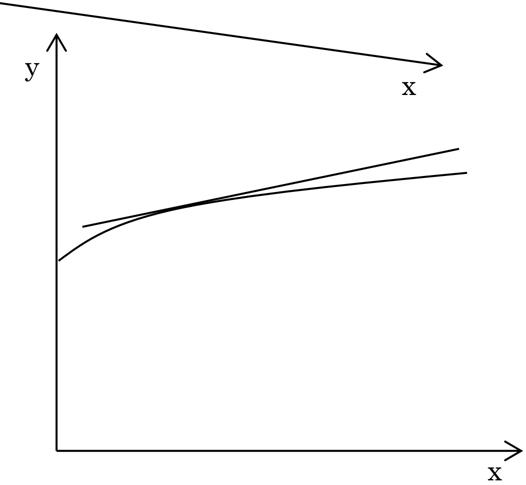


・偏微分とその計算方法

　偏微分は、変数が 3 つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分である。

　右図のように y が x と z の関数となっていたとする。

　このとき、y を x で偏微分するということは、この関数を x 軸に平行な直線で切り取り、その断面の関数(右下図)を微分するということである。



　たとえば、$y = 5x^2z^4$を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cdot 5x^{2-1}z^4 = 10xz^4$$

　となる。

また、この y は z でも偏微分することができ、

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 4 \cdot 5x^2z^{4-1} = 20x^2z^3$$

　となる。

［練習問題］

2. 以下の各式について、y を x と z でそれぞれ偏微分せよ。

① $\mathrm{y} = 4\mathrm{x}^3\mathrm{z}^2$

② $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}^3\mathrm{z} + 4$

③ $\mathrm{y} = \mathrm{xz} + 5\mathrm{x} + 5\mathrm{z}$

④ $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}^{\frac{1}{3}}\mathrm{z}^{\frac{2}{3}}$

⑤ $\mathrm{y} = (3x^2 + 2z^2)^3$

3. 生産量を決める要素として、資本(K)と労働量(L)がある。いま、生産量(Y)が資本と労働量の関数として、$Y = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$とあらわされるとする。

(1) このとき、資本の限界生産力(生産量を資本で偏微分したもの)と、労働の限界生産力(生産量を労働量で偏微分したもの)を求めよ。

(2) このとき、生産者にとって、最適生産点(ある量を生産するとき、その費用が最小となる資本と労働量の組み合わせ)は

$$\frac{\text{資本の限界生産力}}{\text{資本の価格}} = \frac{\text{労働の限界生産力}}{\text{労働の価格}}$$

が成り立つときである。資本の価格が 2、労働の価格が 1 であるとき、生産者が Y を 10 だけ生産するのに最適な資本(K)の大きさはいくらになりますか。