数学 配布資料

2019.7.29 担当：河田

＜第 15 回 総復習＞

［練習問題］（基礎編）

1. もとの長さが 18cm のろうそくがあり、このろうそくを燃やしたとき、6 分間で 3cm 短くなっているとする。このとき、燃やし始めてから 12 分後のろうそくの長さは何 cm になりますか。

ろうそくは、燃やし始めてからx分後に$\frac{1}{2}x$ cm 短くなるので、ろうそくの長さは

$$y = 18 - \frac{1}{2}x\ (\mathrm{cm})$$

となる。よって、12 分後は$18 - \frac{1}{2} \times 12 = 18 - 6 = 12\ (\mathrm{cm})$ となる。 A. 12cm

2. 次の連立方程式を解きなさい。（どのような解法を用いてもよい）

① $\begin{cases} 2x - 3y = -5 & \cdots ① \\ -x + 2y = 3 & \cdots ② \end{cases}$

$$\begin{aligned} ② \times 2 \Leftrightarrow \quad -2x + 4y &= 6 \quad \cdots ②' \\ ① + ②' \Leftrightarrow \quad -3y + 4y &= -5 + 6 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

② に代入して

$$\begin{aligned} -x + 2 \times 1 &= 3 \\ -x &= 3 - 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

② $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = -3 & \cdots ① \\ 3x + 8y = -8 & \cdots ② \end{cases}$

$$\begin{aligned} ① \times 6 \Leftrightarrow \quad 3x + 18y &= -18 \quad \cdots ①' \\ ①' - ② \Leftrightarrow 18y - 8y &= -18 - (-8) \\ 10y &= -10 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

② に代入して

$$\begin{aligned} 3x + 8 \times (-1) &= -8 \\ 3x &= -8 + 8 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. 次の 2 次方程式を解きなさい。（どのような解法を用いてもよい）

① $2x^2 - 8x + 6 = 0$

因数分解すると$2(x-3)(x-1) = 0$となるので、
この 2 次方程式の解は$x = 1, 3$となる。

② $x^2 - 5x + 3 = 0$

解の公式を用いると$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$が、この 2 次方程式の解となる。

4. 次の関数を極小・極大(最小・最大)にするxの値と、極小値・極大値(最小値・最大値)を求めなさい。

① $y = x^2 + 3x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 3x^{1-1} = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

よって$x = -\frac{3}{2}$のとき、最小値$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4}$ をとる。

② $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^{3-1} - 2 \cdot 6x^{2-1} + 1 \cdot 9x^{1-1} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$$

x		1		3	
$\frac{dy}{dx}$	+	0	−	0	+
y	↗	8	↘	4	↗

よって$x = 1$のとき、極大値$y = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 8$をとり、$x = 3$のとき、極大値$y = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 4$をとる。

5. 以下の各式について、z を x と y でそれぞれ偏微分せよ。

① $z = 2xy^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot 2y^2x^{1-1} = 2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathrm{y}} = 2 \cdot 2xy^{2-1} = 4xy$$

② $z = x(y-4)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}(y-4) = (y-4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathrm{y}} = 1 \cdot x(y^{1-1}) = x$$

6. $\log_x \alpha = 5, \log_x \beta = 3$のとき、以下の各式の値を求めよ。

① $\log_x(\alpha\beta)$

$$\log_x(\alpha \times \beta) = \log_x \alpha + \log_x \beta = 5 + 3 = 8$$

② $\log_x\left(\frac{\alpha^3}{\beta^2}\right)$

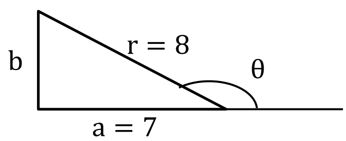
$$\begin{aligned}\log_x(\alpha^3 \div \beta^2)& \\ &= \log_x \alpha^3 - \log_x \beta^2 \\ &= 3\log_x \alpha - 2\log_x \beta = 3 \times 5 - 2 \times 3 = 15 - 6 = 9\end{aligned}$$

7. 以下の各問に答えよ。

① $90^o \leq \theta \leq 180^o, \cos\theta = -\frac{7}{8}$のとき、$\tan\theta$の値を求めよ。

$$\begin{aligned}&7^2 + \mathrm{b}^2 = 8^2 \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{b}^2 = 64 - 49 = 15 \\ \Leftrightarrow\ &b = \sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{15}}{-7} = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$



② $\cos 15^o - \cos 75^o$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\cos 15^o - \cos 75^o &= \cos(45^o - 30^o) - \cos(45^o + 30^o) \\ &= \cos 45^o \cos(-30^o) - \sin 45^o \sin(-30^o) - \{\cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o\} \\ &= \cos 45^o \cos 30^o + \sin 45^o \sin 30^o - (\cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o) \\ &= 2\sin 45^o \sin 30^o = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

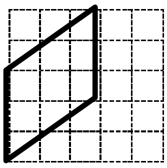
8. 以下の行列の計算をせよ。

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 \\ -1 \times 1 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

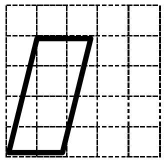
② $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 3 + (-1) \times 0 \\ 2 \times 1 + (-2) \times 2 & 2 \times 3 + (-2) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

9. 以下の行列による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で囲まれた正方形がどのような形に変換されるか、図に表してみよう。

① $\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$



② $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}$



10. 以下の行列による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$で囲まれた正方形が変換される平行四辺形の面積を求めよ。

① $\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 3\end{pmatrix}$ $|2\times 3-(-3)\times(-1)|=|6-3|=3$

② $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ $|2\times 2-0\times 0|=|4-0|=4$

11. 男子 4 名、女子 6 名の中から 3 人の委員を選ぶとき

① 性別に関係なく 3 人を選ぶ選び方は何通りか。

男女合わせて 10 人の中から 3 人の委員を選ぶ組み合わせなので、

$$ {}_{10}C_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120 $$

A. 120 通り

② 男子 1 人、女子 2 人を選ぶ選び方は何通りか。

男子 4 人の中から 1 人の委員を、女子 6 人の中から 2 人の委員を選ぶ組み合わせなので、

$$ {}_4C_1\times {}_6C_2=\frac{4}{1}\times\frac{6\times 5}{2\times 1}=4\times 15=60 $$

A. 60 通り

12. 袋の中に赤球が 4 個、白球が 3 個入っている．この中から同時に 3 個取り出すとき，赤球 2 個、白球 1 個が出てくる確率を求めよ。

赤白あわせて 7 個の球から 3 個の球を取る組み合わせは、${}_7C_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=\frac{210}{6}=35$(通り)
赤球 4 個の中から 2 個を取る組み合わせは、${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=\frac{12}{2}=6$(通り)、白球 3 個の中から 1 個を取る組み合わせは、${}_3C_1=\frac{3}{1}=3$(通り)なので、$6\times 3=18$(通り)となる。
よって、求める確率は、$\frac{18}{35}$となる。

A. $\frac{18}{35}$

［練習問題］（応用編）

1. 企業の生産するある商品の利潤(もうけ)を考えると、利潤(π)＝売上－総費用と求められる。

ここで、売上は、価格×数量(q)として求められる。

総費用(C)が、数量(q)の関数として、$C = q^3 - 6q^2 - 5q - 120$としてあらわされ、この商品の価格が 10 であるとき、この商品の利潤を最大にする生産量(q)と、そのときの利潤(π)を求めよ。

利潤(π)＝売上－総費用なので、$\pi = 10q - (q^3 - 6q^2 - 5q - 120) = -q^3 + 6q^2 + 15q + 120$

である。これを微分すると、$\dfrac{d\pi}{dq} = -3 \cdot q^{3-1} + 2 \cdot 6q^{2-1} + 1 \cdot 15q^{1-1} = -3q^2 + 12q + 15$

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow -3q^2 + 12q + 15 = 0 \Leftrightarrow -3(q+1)(q-5) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{q} = -1{,}5$$

よって$q = 5$のとき、極大値$\mathrm{y} = -5^3 + 6 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 120 = 220$をとる。

2. ある法外な金利を設定した高利貸しは、10 日で 1 割の利息をとる。（通称：トイチ）この高利貸しにお金を借りたとき、返済額が元の金額の 7 倍を超えるのは、何日後か。

$10x$ 日後に 7 倍になるとすると、すなわち、$1.1^x \geq 7$となるxを求める。この両辺の 10 を底とする対数をとると、$\log_{10} 1.1^x \geq \log_{10} 7 \iff x \log_{10} 1.1 \geq \log_{10} 7 \iff x \geq \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 1.1}$

ここで、常用対数表をみると、$\log_{10} 1.1 = 0.0414, \log_{10} 7 = 0.8451$ であるので、

$$x \geq \frac{0.8451}{0.0414} = 20.4 \cdots$$

すなわち、$21 \times 10 = 210$日後には預金が元の 7 倍を超える。

3. 8 個のキャラメルを A,B,C の 3 人で分けるとき、その分け方は何通りあるか。ただし、3 人とも 1 個以上受け取るものとする。

8 個のキャラメルを○○○○○○○○とあらわすと、3 人で分けるということは、この間に 2 本の線を引き、左から A,B,C の順にとっていく(キャラメルはどれも同じと考えている)。

8 個のキャラメルの間の数は 7 か所であるので、ここから 2 か所を選べばよい。よって、

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

A. 21 通り

4. 1~6 が書いてある 6 面体のサイコロ 3 個を同時に投げるとき、出た目の積が偶数になる確率はいくらか。

2 つの数をかけ合わせたとき、

偶数×偶数＝偶数

偶数×奇数＝偶数

奇数×偶数＝偶数

奇数×奇数＝奇数

となる。

よって、サイコロ 3 個の目の積が奇数になるときは、3 個のサイコロの目がすべて奇数の場合であり、これを 1 から引けば、出た目の積が偶数となる確率である。

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

よって、求める確率は、$\frac{7}{8}$となる。

A. $\dfrac{7}{8}$