

<第 11 回 行列と連立方程式> (その2)

・ 3 元連立一次方程式の解

連立方程式の解を行列の考え方をういて解くということは、 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ として \mathbf{x} を求めることであった。

しかし、 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ のような3元連立一次方程式では、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

の逆行列を求める必要がある。

3×3 行列の逆行列は公式で求めることも可能であるが、計算が面倒であるので、掃き出し法といわれる方法を用いて、計算してみる。この手順を紹介する。

① 係数行列の右側に、右辺の定数項を加えた拡大係数行列を作成する。 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

② 拡大係数行列に**行の基本操作**といわれる 3 つの操作をおこなうことで、左側の行列を単位行列にする。行の基本操作とは

- (ア) 2 つの行を入れ替える
- (イ) 1 つの行を a 倍する。
- (ウ) 1 つの行を a 倍し、他の行に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{1 行目の 3 倍を 2 行目から引く}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -7 & 1 & | & -9 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{1 行目の 2 倍を 3 行目から引く}$$

<

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -7 & 1 & | & -9 \\ 0 & -3 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \text{ これで 1 列目が単位ベクトル となった。}$$

2 列目について同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -7 & 1 & | & -9 \\ 0 & -3 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{3 行目の 2 倍を 2 行目から引く}$$

<

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{2 行目を -1 倍する}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{2 行目の 2 倍を 1 行目から}$$

引く

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{2 行目の 3 倍を 3 行目に加える}$$

える

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & -8 \end{pmatrix}$$

3 列目については、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{3 行目を 1/4 倍する}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{3 行目の 2 倍を 1 行目に加える}$$

る

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{3 行目を 2 行目から引く}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

③ この右辺が連立方程式の解である。すなわち、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である。

[練習問題]

次の連立方程式を、行列の積の形で表し、掃き出し法によって解け。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \\ 6x + 5y + 9z = 11 \end{cases}$$

<Excel の利用>

連立方程式の次数が増えたとき、その解を手計算するのではなく、Excel などの表計算ソフトを使用して求めることが考えられる。ここでは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ を Excel を用いて求めることを考えよう。

- 1) 最初に、左辺の係数行列をシートに入力する。ここでは A1:C3 に入力しておこう。
- 2) Excel で連立方程式を解くとき、係数行列の逆行列を、右辺のベクトルに左からかけることで求める。
そこで、係数行列の逆行列を求めてみよう。逆行列を求めるには、MINVERSE 関数を用いる。

この MINVERSE 関数は配列関数である。Excel で関数は、1 つの数値を返すものであるが、配列関数は複数の配列を返すものである。この場合、配列を記入する範囲を指定し、関数を入力した上で、Enter キーの代わりに、**Ctrl** + **Shift** + **Enter** キーを入力する。

📖 手順

- ① 逆行列を記述する範囲 A5:C7 を選択する。
 - ② その状態でセル A5 に式
=MINVERSE(A1:C1) と入力する。
 - ③ **Ctrl** + **Shift** + **Enter** とする。
- 3) 2) で求めた係数行列の逆行列を、右辺の

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	3				
2	3	4	7				
3	6	5	9				
4							
5	0.25	-0.75	0.5		3		4.75
6	3.75	-2.25	0.5		2		12.25
7	-2.25	1.75	-0.5		11		-8.75
8							

ベクトルに左からかける。E5:E7 に右辺のベクトルを記述しておき、MMULT 関数を用いる。手順は、

- ① 解答を記述する範囲 G5:G7 を選択し、② その状態でセル G5 に式 =MMULT(A5:C7, E5:E7) と入力する。
- ③ **Ctrl** + **Shift** + **Enter** とする。