

<第 10 回 行列と連立方程式>

[基礎事項のチェック]

- ・連立方程式の行列表現

$$x + 3y = 5$$

$$3x - 2y = 4$$

という連立方程式があったとする。この連立方程式は、行列の積を使ってあらわすと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ とすると、 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ とあらわせる。

- ・逆行列

$2x = 6$ という1次方程式を解くとき、6を2で割ることによって、 $x = 3$ という解が求まる。

一般に $ax = b$ であれば、 $x = b \div a$ として求めることができる。

しかし、 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ において \mathbf{x} を求める場合、 \mathbf{b} を \mathbf{A} で割るという行列の割り算はできないため、 \mathbf{A} の逆行列を左からかけることになる。

一般に、2行2列の行列の逆行列は、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

として求められる。

したがって $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times (-2) - 3 \times 3} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ である。

[練習問題]

1. 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

・単位行列

行列の対角成分が 1、その他がすべて 0 の行列を単位行列といい、 \mathbf{I} とあらわす。行と列の数の等しい行列は、同じ大きさの単位行列をかけても、もとの行列に等しい。 $(\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A})$

(例)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{のとき、} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

なお、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ となる。

[練習問題]

2. 次の行列に、1.で求めた逆行列、左からと右からそれぞれ掛けて、単位行列になることを確かめよ。

(1) ・左からかけると

1(1)で求めた逆行列

 $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

・右からかけると

$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1(1)で求めた逆行列

 $=$

ともに単位行列となることが、確かめられた。

(2) ・左からかけると

1(2)で求めた逆行列

 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

・右からかけると

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1(2)で求めた逆行列

 $=$

ともに単位行列となることが、確かめられた。

・連立方程式の解

連立方程式を行列の考え方をういて解くということは、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ として \mathbf{x} を求めることである。すなわち、 \mathbf{b} に \mathbf{A} の逆行列を左からかけることになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって、連立方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 \times 5 + (-3) \times 4 \\ -3 \times 5 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

【練習問題】

3. 以下の連立方程式を、行列の積の形で表し、逆行列を左からかけることによって解け。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

① 上の式は $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ とあらわすことができる。

(\square にあてはまる数を記入せよ。)

② 上の式の左辺 $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよう。

③ ②の逆行列を①の式の右辺 $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ に左からかけたものが、連立方程式を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline \text{②で求めた逆行列} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} =$$

答 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} x - 2y = 23 \\ 3x + 5y = -8 \end{cases}$ ((1)と同様の手順で解いてみよう)