数学　配布資料

2018.6.4　担当：河田

＜第 7 回　等比数列＞

・等比数列

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

という数字の並びは、前の数字を 2 倍ずつしていったものである。このように、一定倍ずつしていった数の並びのことを、**等比数列**という。このとき、最初の項(初項という)を a、何倍ずつか(公比という)を r であらわすと、次のように表すことができる。

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$

上の数列では、初項 $a=2$、公比 $r=2$ である。

［練習問題］

1. 以下の数列の□にあてはまる数を求めよ。

(1) $1,\ 3,\ \boxed{},\ 27,\ 81,\ \ldots$

(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \boxed{}, \frac{1}{16}, \ldots$

2. 以下の数列の初項と公比を求めよ。

(1) $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots$

(2) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$

・等比数列の和

等比数列の和をもとめてみよう。等比数列の和をＡとおくと、

$\mathrm{A} = \mathrm{a} + \mathrm{ar} + \mathrm{ar}^2 + \mathrm{ar}^3 + \cdots$　となる。

これをｒ倍すると、

$\mathrm{rA} = \mathrm{ar} + \mathrm{ar}^2 + \mathrm{ar}^3 + \mathrm{ar}^4 + \cdots$　となり、その差は

$(1-r)\mathrm{A} = \mathrm{a} - \mathrm{ar}^n$ となるので、

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{ar}^n}{1-r}$$

である。

［練習問題］

3. 以下のような等比数列の和を求めたい。

（1）1,　2,　4,　8,　16,　32,　64

①　この等比数列の公比ｒはいくつになるか。

②　この等比数列をAとおいたとき、この数列をr倍した数列（これが$\mathrm{r} \times \mathrm{A}$という数列）を書いてみよう。

③　もとの数列から、$\mathrm{r} \times \mathrm{A}$という数列を引き、$(1-r)\mathrm{A}$の値を求めてみよう。

④　等比数列の和Aを求めてみよう。

（2）2,　6,　18,　54,　162,　324,　648,　1296,　2592

（(1)と同様の手順で求めてみよう）

[新しい概念]

・割引現在価値

金利が 1%であったとする。このとき 1 万円預金すると、1 年後に受け取る金額は、

$10000 \times (1 + 0.01) = 10100$ 円となる。

もし反対に、1 年後に 1 万円を受け取れる債券があったなら、この債券を現在購入する価格は、

$10000 \div (1 + 0.01) \fallingdotseq 9901$ 円となる。

この金額は、現時点でのこの債券の価値であり、**割引現在価値**といわれる。

[やってみよう]

（1）年利 1%複利の預金に、現在 1 万円を預け入れた場合、5 年後に受け取る金額はいくらになるかを考えてみよう。

1）まず、1 年後に受け取る金額を考えよう。

1 年後には、$\boxed{①\quad\quad}$(円)×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$) = $\boxed{③\quad\quad}$(円) 受け取ることができる。

↑	↑	↑
元金	利率	もらえる金額

2）次に 2 年後に受け取る金額を考えると、1 年後にもらえる金額をはじめに考えると

2 年後には、$\boxed{③\quad\quad}$(円)×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$) = $\boxed{④\quad\quad}$(円) 受け取ることができる。

↑	↑	↑
1 年後にもらえる金額	利率	2 年後にもらえる金額

この式を元金をスタートして考えると、

2 年後は、$\boxed{①\quad\quad}$(円)×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$) ×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$) = $\boxed{④\quad\quad}$(円)。

↑	↑	↑	↑
元金	利率	利率	もらえる金額

すなわち、$\boxed{①\quad\quad}$(円)×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$)^2 としてあらわすことができる。

3）よって、5 年後に受け取る金額を、元金をスタートとして考えると

5 年後には、$\boxed{③\quad\quad}$(円)×(1＋$\boxed{②\quad\quad}$)^5 = $\boxed{⑤\quad\quad}$(円) 受け取ることができる。

↑	↑	↑
元金	利率	5 年後にもらえる金額

（2）利子率は 1%であるとする。5 年後に満期を迎える額面 1 万円の債券を現在購入する場合の価格を考えよう。

これは(1)で考えたことの反対を考えればよく、現在購入する金額をスタートとして考えると

5 年後には、$\boxed{⑥\qquad\qquad}$(円)×(1＋$\boxed{②\qquad\quad}$)^5 ＝ 10000(円) 受け取ることができる。

↑ 元金　　　↑ 利率

この $\boxed{⑥}$ は、10000÷(1＋$\boxed{②\qquad\quad}$)^5 として、求めることができる。計算して求めてみよう。

［練習問題］

4. 以下の各問に答えよ。(電卓使用可)

（1）年利 1%複利の預金に、4 年後まで毎年 20 万円ずつ預け入れた場合、5 年後に受け取る金額はいくらになるか。

(ヒント　現在預けた 20 万円、1 年後に預けた 20 万円・・・が、それぞれ元金を使った式で、どのように表されるのかを考えると、5 年後に受け取る金額は、等比数列の和になる)

（2）利子率は 1%であるとする。5 年後に満期を迎える額面 100 万円の債券があり、これを現在から 4 年後まで毎年 20 万円ずつ 5 回に分けて購入するとき、購入金額の合計を求めよ。

(ヒント　(1)の考え方を反対に適用すればよい。考えてみよう)