

<第9回 三角関数>

[基礎事項のチェック]

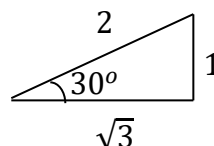
・有名角の三角比

・ $\theta = 30^\circ$ のとき、 $a = \sqrt{3}, b = 1, r = 2$ となる。

よって、

$$\sin 30^\circ = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。

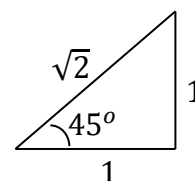


・ $\theta = 45^\circ$ のとき、 $a = 1, b = 1, r = \sqrt{2}$ となる。

よって、

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

となる。

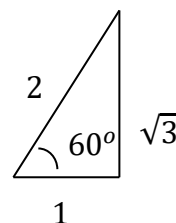


・ $\theta = 60^\circ$ のとき、 $a = 1, b = \sqrt{3}, r = 2$ となる。

よって、

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

となる。



そのほか、

・ $\theta = 0^\circ$ のときは、 $a = 1, b = 0, r = 1$ なので、

$$\sin 0^\circ = \frac{b}{r} = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{a}{r} = \frac{1}{1} = 1, \quad \tan 0^\circ = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

・ $\theta = 90^\circ$ のときは、 $a = 0, b = 1, r = 1$ なので、

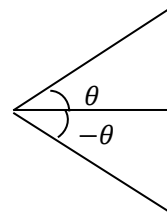
$$\sin 90^\circ = \frac{b}{r} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{a}{r} = \frac{0}{1} = 0, \quad \tan 90^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{0} = \infty$$

となる。

・負の角の三角比

・ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

・ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ となる。



・三角関数の加法定理

三角関数に関して次のような定理がある。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

この定理を使って、 $\sin 75^\circ$ の値を求めると、

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

となる。

[練習問題]

1. 以下の各式の値を求めよ。(ヒント：有名角がどのように組み合わせられているか考えよう)

(1) $\cos 75^\circ$

(2) $\cos 15^\circ$

(3) $\sin 105^\circ$

2. 以下の各式を確かめてみよ。

(1) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$

(3) $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

・三角関数の計算に関するいくつかの公式

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \{\sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)\} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \{\sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)\} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \{\cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)\} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \{\cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)\} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= -2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

・和積の公式

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2} \text{とおくと、}$$

$$\alpha + \beta = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x,$$

$$\alpha - \beta = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y \text{となる。}$$

よって、

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

となる。

・積和の公式

$\alpha = x, \beta = y$ とおくと、

$$\sin x \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$$

となる。

3. 以下の各式の値を求めよ。

(1) $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ$

(2) $\cos 45^\circ \sin 75^\circ$

(3) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$