

<第4回 微分>

・2次関数の最大値・最小値(微分による方法)

2次関数の最大値または最小値を求める方法として、微分による方法もある。

2次関数が最大値または最小値をとるとき、右図のようにその接線はx軸に平行な直線となる。このような直線の傾きは0である。すなわち、2次関数を微分した式に、最大値または最小値をとるときのxを代入すると、その値は0となる。

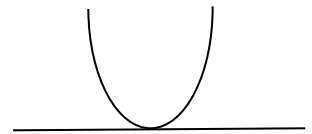
たとえば、 $y = x^2 - 4x + 3$ という2次関数の最小値を、微分によって求めよう。

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} - 4x^{1-1} = 2x - 4 \text{ であるので、} 2x - 4 = 0 \text{ のとき、この2次関数は最小となる。}$$

(最小か最大かはxの2乗の項の符号で判断できる)

すなわち、この2次関数は $x = 2$ のとき、最小となり、最小値は $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$ である。

2次関数が最大または最小となるのは、このようなときである。



[練習問題]

1. 次の2次関数を最小または最大にするxの値と、最小値または最大値を微分を用いて求めなさい。

① $y = x^2 - 2x + 8$

② $y = x^2 + 6x + 9$

③ $y = x^2 - 3x + 5$

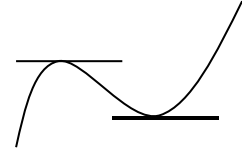
④ $y = -2x^2 - 4x - 8$

・ 3 次関数の極大値・極小値

2 次関数の最大値または最小値を求める方法として、微分による方法があったが、微分を用いれば、3 次関数以上の極大値・極小値を求めることもできる。

3 次関数において、右図のように接線が x 軸に平行な直線(すなわち傾きは 0)となる時、極大値または極小値をとる。極大・極小とはその周辺での最大・最小ということである。

3 次関数の接線の傾きが 0 のとき、極大値または極小値をとる。



接線の傾きが 0 の点が極大値であるか極小値であるかは、増減表を書くことによって求められる。

たとえば、 $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ という 3 次関数の極大値・極小値を求めてみよう。

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 4x^{1-1} = 3x^2 + 4x - 4 \text{ であるので、} 3x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ のとき、}$$

この 3 次関数は極値をとる。 $3x^2 + 4x - 4 = 0$ を因数分解すると、 $(3x - 2)(x + 2) = 0$ なるので、 $x = -2, \frac{2}{3}$ のときが極値である。

次に、 $\frac{dy}{dx}$ の符号を考える。 $x < -2$ のときは+、 $-2 < x < \frac{2}{3}$ のときは-、 $x > \frac{2}{3}$ のときは+である。

$\frac{dy}{dx} > 0$ のとき、 y は増加し、 $\frac{dy}{dx} < 0$ のとき、 y は減少する。もとの関数に代入することで、極大値 11、極小値 $\frac{41}{27}$ が求められる。

x		-2		$\frac{2}{3}$	
$\frac{dy}{dx}$	+	0	-	0	+
y	↗	11	↘	$\frac{41}{27}$	↗

[練習問題]

2. 次の 3 次関数を極小・極大にする x の値と、極小値・極大値を求めなさい。

① $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3$

② $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$