数学　配布資料

2017.6.19　担当：河田

＜第 11 回　行列と連立方程式＞（その2）

・3 元連立一次方程式の解

連立方程式の解を行列の考え方を用いて解くということは、$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$として$\mathbf{x}$を求めることであった。

しかし、$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$のような3元連立一次方程式では、$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$となり、$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$の逆行列を求める必要がある。

3×3 行列の逆行列は公式で求めることも可能であるが、計算が面倒であるので、**掃き出し法**といわれる方法を用いて、計算してみる。この手順を紹介する。

① 係数行列の右側に、右辺の定数項を加えた拡大係数行列を作成する。$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\3&-1&1&0\\2&1&1&1\end{array}\right)$

② 拡大係数行列に**行の基本操作**といわれる 3 つの操作をおこなうことで、左側の行列を単位行列にする。行の基本操作とは

(ア)2 つの行を入れ替える
(イ)1 つの行を a 倍する。
(ウ)1 つの行を a 倍し、他の行に加える。

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\3&-1&1&0\\2&1&1&1\end{array}\right)$→1 行目の 3 倍を 2 行目から引く

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\2&1&1&1\end{array}\right)$→1 行目の 2 倍を 3 行目から引く

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$　これで 1 列目が単位ベクトルとなった。

2 列目について同様に、

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→3 行目の 2 倍を 2 行目から引く

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&-1&1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目を-1 倍する

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&1&-1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目の 2 倍を 1 行目から引く

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目の 3 倍を 3 行目に加える

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&4&-8\end{array}\right)$

3 列目については、

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&4&-8\end{array}\right)$→3 行目を 1/4 倍する

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$→3 行目の 2 倍を 1 行目に加える

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$→3 行目を 2 行目から引く

→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$

③ この右辺が連立方程式の解である。すなわち、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$である。

[練習問題]

次の連立方程式を、行列の積の形で表し、掃き出し法によって解け。

$$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+7z=2 \\ 6x+5y+9z=11 \end{cases}$$

<Excel の利用>

連立方程式の次数が増えたとき、その解を手計算するのではなく、Excel などの表計算ソフトを使用して求めることが考えられる。ここでは$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$を Excel を用いて求めることを考えよう。

1) 最初に、左辺の係数行列をシートに入力する。ここでは A1:C3 に入力しておこう。

2) Excel で連立方程式を解くとき、係数行列の逆行列を、右辺のベクトルに左からかけることで求める。そこで、係数行列の逆行列を求めてみよう。逆行列を求めるには、MINVERSE 関数を用いる。

この MINVERSE 関数は**配列関数**である。Excel で関数は、1 つの数値を返すものであるが、配列関数は複数の配列を返すものである。この場合、配列を記入する範囲を指定し、関数を入力した上で、Enter キーの代わりに、Ctrl + Shift + Enter キーを入力する。

📖 手順

① 逆行列を記述する範囲A5:C7を選択する。

② その状態でセルA5に式 =MINVERSE(A1:C1) と入力する。

③ Ctrl + Shift + Enter とする。

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	3				
2	3	4	7				
3	6	5	9				
4							
5	0.25	-0.75	0.5		3		4.75
6	3.75	-2.25	0.5		2		12.25
7	-2.25	1.75	-0.5		11		-8.75
8							

3) 2) で求めた係数行列の逆行列を、右辺のベクトルに左からかける。E5:E7 に右辺のベクトルを記述しておき、MMULT 関数を用いる。手順は、① 解答を記述する範囲 G5:G7 を選択し、② その状態でセル G5 に式 =MMULT(A5:C7, E5:E7) と入力する。③ Ctrl + Shift + Enter とする。