管理工学 第8回

モンティ・ホール問題の理論的解説

2017 年 11 月 27 日

問　あるテレビのゲーム番組では、参加者は 3 つのドア (左からドア A, ドア B, ドア C とする) のいずれかを選び、その後ろにある商品をもらうことができる。ひとつのドアの後ろには車が、残り 2 つのドアの後ろにはたわしが置いてある。

参加者がドア A を選んだとする。このとき、ドアの後ろに何がおいてあるか知っている司会者はドア C を開けて参加者にこう言った「ドア B に変えますか？」参加者はドア B に変えたほうが良いのであろうか。

(解) 司会者は必ずたわしのドアを開けるものとする
車の場所　ドア A の後ろ X_1　ドア B の後ろ X_2　ドア C の後ろ X_3
司会者の開けるドア　ドア A Y_1　ドア B Y_2　ドア C Y_3
とする。
$P(X_1|Y_3)$(ドアを変えない方が良い) と $P(X_2|Y_3)$(ドアを変えた方が良い) の比較となる。

車がどのドアの後ろにあるかは等確率とする。すなわち、$P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}$

ドア A の後ろに車があるとき、司会者はドア B ドア C のいずれかのドアをあける。これを等確率で開けるものとすると

$$P(Y_1|X_1) = 0, P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = \frac{1}{2}$$

ドア B の後ろに車があるとき、司会者はドア C をあける。

$$P(Y_1|X_2) = P(Y_2|X_2) = 0, P(Y_3|X_2) = 1$$

ドア C の後ろに車があるとき、司会者はドア B をあける。

$$P(Y_1|X_3) = P(Y_3|X_3) = 0, P(Y_2|X_3) = 1$$

ベイズの定理を用いて $P(X_1|Y_3)$ と $P(X_2|Y_3)$ を計算する。

$$\begin{aligned} P(X_1|Y_3) &= \frac{P(X_1) \times P(Y_3|X_1)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2|Y_3) &= \frac{P(X_2) \times P(Y_3|X_2)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$P(X_1|Y_3) < P(X_2|Y_3)$ となることから、参加者はドアを変えた方が良い。