統計学 練習問題

第9回 確率と確率分布(3) 問2解説

2016年5月11日

問2 あるテレビのゲーム番組では、参加者は3つのドア(左からドアA, ドアB, ドアCとする)のいずれかを選び、その後ろにある商品をもらうことができる。ひとつのドアの後ろには車が、残り2つのドアの後ろにはたわしが置いてある。

参加者がドアAを選んだとする。このとき、ドアの後ろに何がおいてあるか知っている司会者はドアCを開けて参加者にこう言った「ドアBに変えますか？」参加者はドアBに変えたほうが良いのであろうか。

(解) **司会者は必ずたわしのドアを開けるものとする**

車の場所 ドアAの後ろ X_1 ドアBの後ろ X_2 ドアCの後ろ X_3

司会者の開けるドア ドアA Y_1 ドアB Y_2 ドアC Y_3

とする。

$P(X_1|Y_3)$(ドアを変えない方が良い) と $P(X_2|Y_3)$(ドアを変えた方が良い) の比較となる。

車がどのドアの後ろにあるかは等確率とする。すなわち、$P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}$

ドアAの後ろに車があるとき、司会者はドアBドアCのいずれかのドアをあける。これを等確率で開けるものとすると

$$P(Y_1|X_1) = 0, P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = \frac{1}{2}$$

ドアBの後ろに車があるとき、司会者はドアCをあける。

$$P(Y_1|X_2) = P(Y_2|X_2) = 0, P(Y_3|X_2) = 1$$

ドアCの後ろに車があるとき、司会者はドアBをあける。

$$P(Y_1|X_3) = P(Y_3|X_3) = 0, P(Y_2|X_3) = 1$$

ベイズの定理を用いて $P(X_1|Y_3)$ と $P(X_2|Y_3)$ を計算する。

$$\begin{aligned} P(X_1|Y_3) &= \frac{P(X_1) \times P(Y_3|X_1)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2|Y_3) &= \frac{P(X_2) \times P(Y_3|X_2)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$P(X_1|Y_3) < P(X_2|Y_3)$ となることから、参加者はドアを変えた方が良い。