数学 配布資料

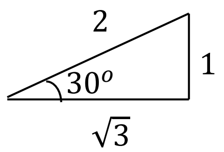
2016.5.30　担当:河田

＜第 8 回 三角関数＞

［基礎事項のチェック］

・有名角の三角比

・$\theta = 30^o$のとき、$\mathrm{a} = \sqrt{3}, \mathrm{b} = 1, \mathrm{r} = 2$となる。



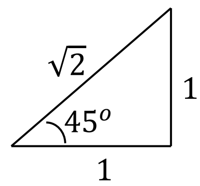
よって、

$$\sin 30^o = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^o = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^o = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。

・$\theta = 45^o$のとき、$\mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 1, \mathrm{r} = \sqrt{2}$となる。

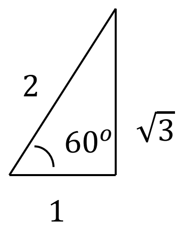
よって、



$$\sin 45^o = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45^o = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \tan 45^o = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

となる。

・$\theta = 60^o$のとき、$\mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = \sqrt{3}, \mathrm{r} = 2$となる。



よって、

$$\sin 60^o = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^o = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \tan 60^o = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

となる。

そのほか、

・$\theta = 0^o$のときは、$\mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 0, \mathrm{r} = 1$なので、

$$\sin 0^o = \frac{b}{r} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \cos 0^o = \frac{a}{r} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \tan 0^o = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

・$\theta = 90^o$のときは、$\mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 1, \mathrm{r} = 1$なので、

$$\sin 90^o = \frac{b}{r} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \cos 90^o = \frac{a}{r} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \tan 90^o = \frac{b}{a} = \frac{1}{0} = \infty$$

となる。

・三角関数の加法定理

三角関数に関して次のような定理がある。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

この定理を使って、$\sin 75^o$ の値を求めると、

$$\sin(45^o+30^o)=\sin 45^o\cos 30^o+\cos 45^o\sin 30^o=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

となる。

[練習問題]

2. 以下の各式の値を求めよ。

（1） $\cos 75^o$

（2） $\cos 15^o$

（3） $\sin 105^o$

3. 以下の各式を確かめてみよ。

（1） $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

（2） $\sin(90^o+\theta)=\cos\theta$

（3） $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

・三角関数の計算に関するいくつかの公式

$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
&\qquad=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\{\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\}\\
&\qquad=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\
&\qquad=2\sin\alpha\cos\beta\\
&\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
&\qquad=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\{\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\}\\
&\qquad=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\
&\qquad=2\cos\alpha\sin\beta\\
&\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
&\qquad=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\{\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\}\\
&\qquad=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
&\qquad=2\cos\alpha\cos\beta\\
&\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\\
&\qquad=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\{\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\}\\
&\qquad=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\
&\qquad=-2\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

・和積の公式

$\alpha=\frac{x+y}{2},\beta=\frac{x-y}{2}$とおくと、

$$\alpha+\beta=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x,$$

$\alpha-\beta=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y$となる。

よって、

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

となる。

・積和の公式

$\alpha=x,\beta=y$とおくと、

$$\sin x\sin y=-\frac{\cos(x+\mathrm{y})-\cos(x-\mathrm{y})}{2}$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x+\mathrm{y})+\cos(x-\mathrm{y})}{2}$$

$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+\mathrm{y})+\sin(x-\mathrm{y})}{2}$$

$$\cos x\sin y=\frac{\sin(x+\mathrm{y})-\sin(x-\mathrm{y})}{2}$$

となる。

4. 以下の各式の値を求めよ。

（1） $\cos 15^o - \cos 75^o$

（2） $\cos 45^o \sin 75^o$

（3） $\sin 75^o \cos 15^o$