数学　配布資料

2016.5.2　担当：河田

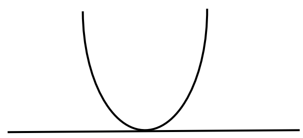
＜第 4 回　微分＞

・2 次関数の最大値・最小値(微分による方法)

2 次関数の最大値または最小値を求める方法として、微分による方法もある。

2 次関数が最大値または最小値をとるとき、右図のようにその接線は x 軸に平行な直線となる。このような直線の**傾きは 0** である。すなわち、2 次関数を微分した式に、最大値または最小値をとるときの x を代入すると、その値は 0 となる。

2 次関数が最大または最小となるのは、このようなときである。



たとえば、$y = x^2 - 4x + 3$ という 2 次関数の最小値を、微分によって求めよう。

$\frac{dy}{dx} = 2・x^{2-1} - 4x^{1-1} = 2x - 4$ であるので、$2x - 4 = 0$のとき、この 2 次関数は最小となる。

（最小か最大かは x の 2 乗の項の符号で判断できる）

すなわち、この 2 次関数は$x = 2$のとき、最小となり、最小値は$y = 2^2 - 4・2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$である。

［練習問題］

1. 次の 2 次関数を最小または最大にするxの値と、最小値または最大値を微分を用いて求めなさい。

① $y = x^2 - 2x + 8$

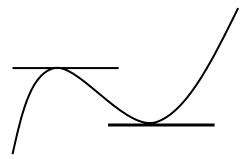
② $y = x^2 + 6x + 9$

③ $y = x^2 - 3x + 5$

④ $y = -2x^2 - 4x - 8$

・3 次関数の極大値・極小値

3 次関数の接線の傾きが 0 のとき、極大値または極小値をとる。



2 次関数の最大値または最小値を求める方法として、微分による方法があったが、微分を用いれば、3 次関数以上の極大値・極小値を求めることもできる。

3 次関数において、右図のように接線が x 軸に平行な直線(すなわち**傾きは 0**)となるとき、極大値または極小値をとる。極大・極小とはその周辺での最大・最小ということである。

接線の傾きが 0 の点が極大値であるか極小値であるかは、増減表を書くことによって求められる。

たとえば、$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ という 3 次関数の極大値・極小値を求めてみよう。

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 4x^{1-1} = 3x^2 + 4x - 4$ であるので、$3x^2 + 4x - 4 = 0$のとき、この 3 次関数は極値をとる。$3x^2 + 4x - 4 = 0$ を因数分解すると、$(3x - 2)(x + 2) = 0$ なるので、$x = -2, \frac{2}{3}$ のときが極値である。

次に、$\frac{dy}{dx}$の符号を考える。$x < -2$ のときは＋、$-2 < x < \frac{2}{3}$ のときは－、$x > \frac{2}{3}$ のときは＋である。

$\frac{dy}{dx} > 0$のとき、yは増加し、$\frac{dy}{dx} < 0$のとき、yは減少する。もとの関数に代入することで、極大値11、極小値$\frac{41}{27}$が求められる。

x		-2		$\frac{2}{3}$	
$\frac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	11	↘	$\frac{41}{27}$	↗

［練習問題］

2. 次の 3 次関数を極小・極大にするxの値と、極小値・極大値を求めなさい。

　① $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3$

　② $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$