数学　配布資料

2016.6.20　担当：河田

＜第 11 回　行列と連立方程式＞（その2）

・3 元連立一次方程式の解

連立方程式の解を行列の考え方を用いて解くということは、$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$として$\mathbf{x}$を求めることであった。

しかし、$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$のような3元連立一次方程式では、$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$となり、$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$の逆行列を求める必要がある。

3×3 行列の逆行列は公式で求めることも可能であるが、計算が面倒であるので、**掃き出し法**といわれる方法を用いて、計算してみる。この手順を紹介する。

① 係数行列の右側に、右辺の定数項を加えた拡大係数行列を作成する。$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\3&-1&1&0\\2&1&1&1\end{array}\right)$

② 拡大係数行列に行の基本操作といわれる 3 つの操作をおこなうことで、左側の行列を単位行列にする。行の基本操作とは

(ア) 2 つの行を入れ替える

(イ) 1 つの行を a 倍する。

(ウ) 1 つの行を a 倍し、他の行に加える。

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\3&-1&1&0\\2&1&1&1\end{array}\right)$→1 行目の 3 倍を 2 行目から引く→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\2&1&1&1\end{array}\right)$→1 行目の 2 倍を 3 行目から引く→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$　これで 1 列目が単位ベクトルとなった。

2 列目について同様に、$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-7&1&-9\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→3 行目の 2 倍を 2 行目から引く→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&-1&1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目を-1 倍する→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&1&-1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目の 2 倍を 1 行目から引く→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&-3&1&-5\end{array}\right)$→2 行目の 3 倍を 3 行目に加える→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&4&-8\end{array}\right)$

3 列目については、$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&4&-8\end{array}\right)$→3 行目を 1/4 倍する→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&5\\0&1&1&-1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$→3 行目の 2 倍を 1 行目に加える→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$→3 行目を 2 行目から引く→$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right)$

③ この右辺が連立方程式の解である。すなわち、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$である。

[練習問題]

以下の連立方程式を、行列の積の形で表し、掃き出し法によって解け。

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+7z=2 \\ 6x+5y+9z=11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -2y+z=3 \\ -x+y-4z=-7 \\ 3x+3y+z=4 \end{cases}$