計量経済学 参考資料
– 重決定係数の変形 (3 変量の場合) –

河田 正樹

2016 年 6 月 2 日

重決定係数について

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{b}S_{xy} + \hat{c}S_{wy}}{S_y^2}$$

となることを示す。

式変形 1　$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})$ である。

この変形を証明するために、次のような最小 2 乗法の残差の性質を用いる。

1. $\sum e_i = 0$
2. $\sum X_i e_i = 0$
3. $\sum W_i e_i = 0$
4. $\sum \hat{Y}_i e_i = 0$

(性質の証明)

1. 正規方程式を導出するために、残差 2 乗和 G を $\hat{a}$ で偏微分し、

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{a}} = -2\{(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + (Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\}$$

   のカッコ内を 0 とおくが、$Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i - \hat{c}W_i = e_i$ より、$\sum e_i = 0$ である。

2. 正規方程式を導出するために、残差 2 乗和 G を $\hat{b}$ で偏微分し、

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{b}} = -2\{X_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + X_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\}$$

   のカッコ内を 0 とおくが、$Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i - \hat{c}W_i = e_i$ より、$\sum X_i e_i = 0$ である。

3. 正規方程式を導出するために、残差 2 乗和 G を $\hat{c}$ で偏微分し、

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{c}} = -2\{W_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + W_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\}$$

   のカッコ内を 0 とおくが、$Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i - \hat{c}W_i = e_i$ より、$\sum W_i e_i = 0$ である。

4.

$$\begin{aligned}\sum \hat{Y}_i e_i &= \sum(\hat{a} + \hat{b}X_i + \hat{c}W_i)e_i \\ &= \hat{a}\sum e_i + \hat{b}\sum X_i e_i + \hat{c}\sum W_i e_i\end{aligned}$$

   性質 1. 2. 3. より $\sum \hat{Y}_i e_i = 0$ が成り立つ。

ところで、$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 &= \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})\{(Y_i - \bar{Y}) - (Y_i - \hat{Y}_i)\} \\
&= \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})\{(Y_i - \bar{Y}) - e_i)\} \\
&= \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) - \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})e_i \\
&= \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) - \sum\hat{Y}_i e_i + \bar{Y}\sum e_i
\end{aligned}$$

ここで、先ほどの性質 1. と 4. を用いることによって、式変形 1 が示された。

式変形 2　$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) = \hat{b}S_{xy} + \hat{c}S_{wy}$ である。

(証明)$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + \hat{c}W_i, \bar{Y} = \hat{a} + \hat{b}\bar{X} + \hat{c}\bar{W}$(これは正規方程式 $\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i + \hat{c}\sum W_i$ を n で割ることによって求まる) を代入することによって、

$$\begin{aligned}
\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum\{\hat{a} + \hat{b}X_i + \hat{c}W_i - (\hat{a} + \hat{b}\bar{X} + \hat{c}\bar{W})\}(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \sum\{\hat{b}(X_i - \bar{X}) + \hat{c}(W_i - \bar{W})\}(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \sum\{\hat{b}x_i + \hat{c}w_i\}y_i \\
&= \hat{b}\sum x_i y_i + \hat{c}\sum w_i y_i \\
&= \hat{b}S_{xy} + \hat{c}S_{wy}
\end{aligned}$$

となる。

R^2 の分母は $\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = S_y^2$ であることから、

$$R^2 = \frac{\hat{b}S_{xy} + \hat{c}S_{wy}}{S_y^2}$$

という変形をおこなうことができる。