数学　配布資料

2015.6.15　担当：河田

＜第 9 回　さまざまな関数の微分＞

第 4 回に$y = x^5$ のとき、$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$であることを学んだ。

では、$y = 5^x$のとき、$\frac{dy}{dx}$はどうなるであろうか？

実はこの問題は、結構難しい。

［新しい概念］

・ネイピア数

ネイピア数$e = 2.71828\ldots$という数がある。この数は円周率πのように、循環しない無限小数である。

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$として定義され、自然対数の底としても用いられる。

・e^xの微分

e^xをxで微分すると、そのままe^xである。

e^{2x}をxで微分すると、合成関数の微分を用いて、そのまま$2e^{2x}$となる。

・自然対数

対数において、底をネイピア数 e としたものを自然対数という。

$\log_e x$であるが、$\ln x$ともあらわされる。

・$\ln x$の微分

$\ln x$をxで微分すると、$\frac{1}{x}$になる。

$\ln 2x$をxで微分すると、合成関数の微分を用いて、$\frac{1}{x}$になる。

［練習問題］　1. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

① $y = e^{-x}$

② $y = e^{-2x}$

③ $y = \ln x^2$

④ $y = (\ln x)^3$

［新しい概念］

・a^xの微分

a^xをxで微分すると、$a^x \ln a$となる。

（導出）　$y = a^x$の両辺の対数をとると、$\ln y = \ln a^x = x \ln a$となる。この両辺を x で微分する。

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{d(x \ln a)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

・$\log_a x$の微分

$\log_a x$をxで微分すると、$\frac{1}{x \ln a}$になる。（導出は省略します）

［練習問題］　2. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

① $y = 2^x$

② $y = 2^{-2x}$

③ $y = \log_{10} x$

④ $y = \log_{10} 3x$

［新しい概念］

・三角関数の微分

三角関数の微分に関して、つぎのような規則が成り立つ。

$$(\sin x)' = \cos x\,, (\cos x)' = -\sin x$$

［練習問題］　3. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

① $y = \sin 2x$

② $y = \sin x^2$

③ $y = \cos^2 x$