

<第6回 指数関数と対数関数>

[練習問題] 1. 以下の各計算をおこなえ。

(1) $2^2 \times 2^3 =$

(2) $x^2 \times x^3 =$

(3) $2^4 \div 2^2 =$

(4) $x^4 \div x^2 =$

(5) $(2^3)^2 =$

(6) $(x^3)^2 =$

(7) $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} =$

(8) $x^{1.2} \div x^{0.4} =$

(9) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

[基礎事項のチェック]

・ 指数の計算規則

指数の計算に関して、次のような規則が成り立つ。

$$X^a \times X^b = X^{(a+b)}$$

$$X^a \div X^b = X^{(a-b)}$$

$$(X^a)^b = X^{(a \times b)}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a \text{ は } \left(\frac{y}{x}\right)^a \text{ の逆数}$$

[練習問題] 2. $\left(\frac{K}{L}\right)^{0.5} = 4$ のとき、下の各式の値を求めよ。

(1) $\left(\frac{L}{K}\right)^{0.5} =$

(2) $\left(\frac{K}{L}\right) =$

(3) $\left(\frac{L}{K}\right)^{0.25} =$

[基礎事項のチェック]

・対数

$x^a = b$ が成り立っているとする。このとき、 b は x の何乗であるかという視点で考える。それが対数であり、 $\log_x b = a$ とあらわすことができる。

(例) $\log_2 8 = 3$ ($2^3 = 8$ より)

$\log_{10} 100 = 2$ ($10^2 = 100$ より)

$\log_5 1 = 0$ ($5^0 = 1$ より)

[練習問題] 3. 以下の対数の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\log_2 16 =$

(2) $\log_5 125 =$

(3) $\log_3 81 =$

[基礎事項のチェック]

・対数の計算規則

対数の計算に関して、つぎのような規則が成り立つ。

$$\log_x(\alpha\beta) = \log_x \alpha + \log_x \beta$$

$$\log_x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_x \alpha - \log_x \beta$$

$$\log_x \alpha^m = m \log_x \alpha$$

[練習問題]

4. 以下の各計算をおこなえ。

(1) $\log_2(4 \times 8) =$

(2) $\log_3 \left(\frac{81}{3}\right) =$

(3) $\log_{10} 10^3 =$

5. $\log_x \alpha = 3, \log_x \beta = 2$ のとき、以下の各式の値を求めよ。

(1) $\log_x(\alpha\beta) =$

(2) $\log_x \alpha^2 =$

(3) $\log_x \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right) =$

[基礎事項のチェック]

・指数関数と対数関数

$y = a^x$ のような関数を指数関数とよび、 $y = \log_a x$ のような関数を対数関数とよぶ。
この2つの関数は、 x と y を入れ替えた関係にある。

(証明) $y = a^x$ の両辺を a を底とする対数をとると、

$$\log_a y = \log_a a^x$$

$$\log_a y = x \log_a a$$

$$\log_a y = x$$

となる。

・指数関数・対数関数の応用

ある金融機関の預金は、年利5%であるとする。この預金に預け続けるとき、預金が元の2倍を超えるのは、何年後か。

この問題は、 $y = 1.05^x$ という指数関数で、 $y \geq 2$ となる x を求めるということである。

すなわち、 $1.05^x \geq 2$ となる x を求める。

この両辺の10を底とする対数をとると、

$$\log_{10} 1.05^x \geq \log_{10} 2$$

$$x \log_{10} 1.05 \geq \log_{10} 2$$

$$x \geq \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05}$$

ここで、常用対数表をみると、 $\log_{10} 1.05 = 0.0212$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ であるので、

$$x \geq \frac{0.3010}{0.0212} = 14.198 \dots$$

すなわち、15年後には預金が元の2倍を超える。

[練習問題] 6. ある法外な金利を設定した高利貸しは、10日で1割の利息をとる。(通称：トイチ)
この高利貸しにお金を借りたとき、返済額が元の金額の5倍を超えるのは、何日後か。