数学　配布資料

2015.5.18　担当：河田

＜第 5 回　微分の計算その 2･偏微分＞

微分の計算方法は、次のようなものであった。

「肩を前に出して、肩を１つ下げる」

・$y = 2x^3$ のとき、$\dfrac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} = 6x^2$

・$y = 5x^2 + 2x + 9$ のとき、$\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot 2x^{1-1} = 10x + 2$

・整数でない累乗の微分

整数でない累乗の微分を、考えよう。たとえば$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$をxで微分することを考えよう。

・$y = x^{\frac{1}{2}}$ のとき、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　($x^{-1} = \dfrac{1}{x}$なので$x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$)

・$y = 2x^{0.8}$ のとき、$\dfrac{dy}{dx} = 0.8 \cdot 2x^{0.8-1} = 0.4x^{-0.2}$

［練習問題］

1.　以下の各式について、y を x で微分せよ。

①　$y = 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{5}}$

②　$y = 2x^{1.2} + 4x^{0.4}$

・合成関数の微分

$y = (2x + 3)^5$のような関数の微分を考える。この関数は展開してから微分することも可能であるが、それでは計算が面倒である。そこで、合成関数の微分という方法を用いる。

合成関数の微分は「カッコをひとまとまりとして微分し、カッコ内の微分をかける」いう計算になる。

・$y = (2x + 3)^5$のとき、$\dfrac{dy}{dx} = 5(2x + 3)^{5-1} \times 2 = 10(2x + 3)^4$

↑　(2x + 3) をひとまとまりとして微分

↑　(2x + 3)の微分

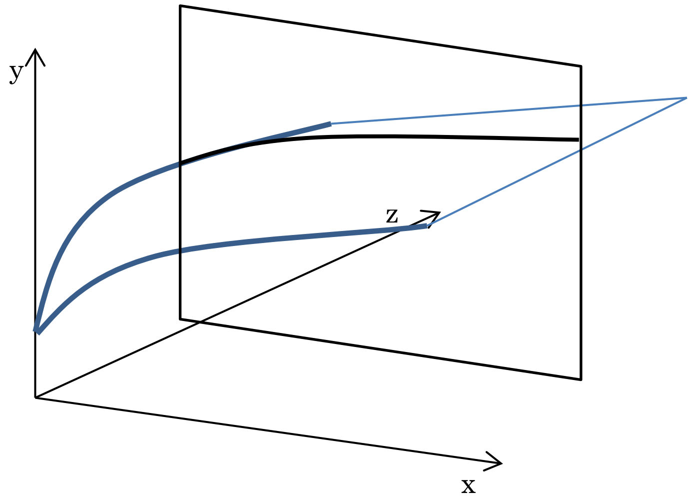
［練習問題］

2. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

① $y = (3x + 2)^4$

② $y = (2x^2 + 4x + 5)^4$

［新しい概念］

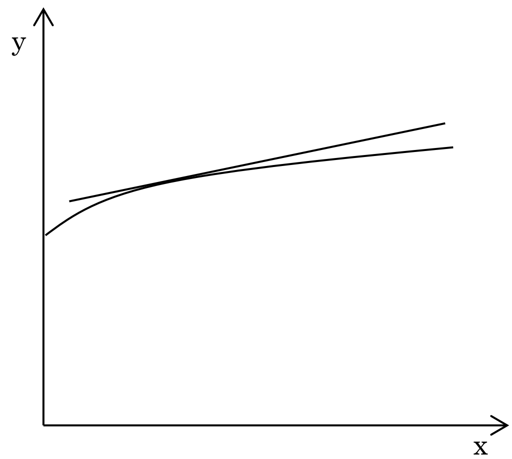


・偏微分とその計算方法

偏微分は、変数が 3 つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分である。

右図のように y が x と z の関数となっていたとする。

このとき、y を x で偏微分するということは、この関数を x 軸に平行な直線で切り取り、その断面の関数(右下図)を微分するということである。



たとえば、$y = 5x^2z^4$を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cdot 5x^{2-1}z^4 = 10xz^4$$

となる。

また、この y は z でも偏微分することができ、

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 4 \cdot 5x^2z^{4-1} = 20x^2z^3$$

となる。

［練習問題］

3．以下の各式について、y を x と z でそれぞれ偏微分せよ。

① $y = 4x^3z^2$

② $y = 2x^3z + 4$

③ $y = xz + 5x + 5z$

④ $y = 2x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}$

⑤ $y = (3x^2 + 2z^2)^3$