数学　配布資料

2015.4.27　担当：河田

＜第 3 回　2 次方程式と 2 次関数＞

［基礎事項のチェック］

・2 次方程式の解と 2 次関数

⇒ $ax^2+bx+c=0$ という 2 次方程式がある。この方程式を満たす解の求め方には、因数分解による方法と解の公式を用いる方法の 2 通りの方法がある。

・因数分解による方法

因数分解とは、2 次方程式を$(x-\alpha)(x-\beta)=0$という形に変形することである。この時、$x=\alpha$または$x=\beta$であれば、片方のかっこの中が 0 になるので、$x=\alpha$または$x=\beta$が、この方程式の解である。

また、$2x^2-8x+6=0$のように、x^2の係数が 1 でなければ、$2(x^2-4x+3)=0$ のように、全体をその係数でくくり、カッコ内を因数分解する。

たとえば、$x^2-5x+6=0$ という 2 次方程式を因数分解によって解くことを考えよう。

2+3=5 である　　2×3=6 である
↓　　↓

$$
\begin{aligned}
x^2-5x+6 &= 0\\
(x-2)(x-3) &= 0
\end{aligned}
$$

和がxの 1 次の項の係数、積が定数項になるようなものを探す。

この方程式の解は$x=2,3$（$x=2$または$x=3$の意味）である。

［練習問題］

1. 次の 2 次方程式を因数分解を用いて解きなさい。

① $x^2-6x+8=0$

② $x^2-4x+4=0$

③ $x^2-x-6=0$

④ $2x^2-10x+8=0$

・解の公式を用いる方法

解の公式とは、2 次方程式の解を求める公式である。因数分解によって解を求めることが簡単はない場合でも、この公式を用いれば解が求まる。それは

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

というものである。先ほどの、$x^2-5x+6=0$ は、解の公式を用いても解くことができ、

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\frac{4}{2},\frac{6}{2}=2,3$$

となる。

［練習問題］

2. 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解きなさい。

① $x^2+2x-8=0$

② $x^2-6x+9=0$

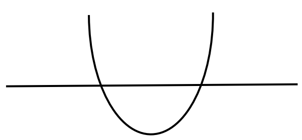
③ $x^2-5x-14=0$

④ $2x^2-6x-8=0$

※ 2 次方程式の解の個数は、常に 2 個というわけではなく、解が存在しない場合もある。解の公式の√の中の$\mathrm{D}=b^2-4ac$（これを判別式という）の正負によって、解の個数が変わる。これは$\mathrm{y}=ax^2+bx+c$という 2 次関数が x 軸と交わる交点の数と同じである。

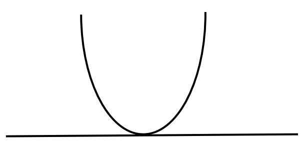
$\mathrm{D}=b^2-4ac>0$

xは 2 つの実数解をもつ



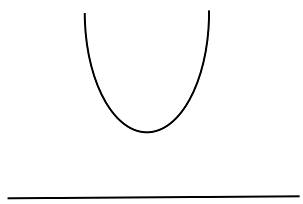
$\mathrm{D}=b^2-4ac=0$

xは実数の重解をもつ



$\mathrm{D}=b^2-4ac<0$

xは実数解をもたない



・2 次関数の最大値・最小値

・平方完成による方法

2 次関数の最大値または最小値を求める方法として、平方完成による方法がある。

平方完成とは$y = ax^2 + bx + c$を$y = a(x + \alpha)^2 + \beta$のように、変形する方法である。

たとえば、$y = x^2 - 4x + 3$ という 2 次関数の最小値を、平方完成によって求めよう。

この数の半分の数がかっこの中に入る

↓

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

↑

カッコを展開したものと、この数の和が元の定数項に等しくなるように

この 2 次関数は$x = 2$において、最小値-1 をとる。

［練習問題］

3. 次の 2 次関数を最小または最大にするxの値と、最小値または最大値を求めなさい。

① $y = x^2 - 2x + 8$

② $y = x^2 + 6x + 9$

③ $y = x^2 - 3x + 5$

④ $y = -2x^2 - 4x - 8$

4. 企業の生産するある商品の利潤(もうけ)を考えると、利潤(π)＝売上－総費用と求められる。
ここで、売上は、価格×数量(q)として求められる。
総費用(C)が、数量(q)の関数として、$C = q^2 + 2q + 1$としてあらわされ、この商品の価格が 6 であるとき、この商品の利潤を最大にする生産量(q)と、そのときの利潤(π)を求めよ。