数学　配布資料

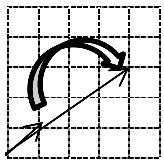
2015.7.13　担当：河田

＜第 12 回　1 次変換＞

[新しい概念]

・1 次変換

・次のような行列の積があったとする。

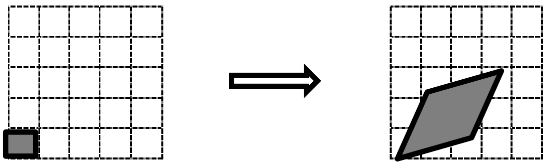


$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 + 1\times 1 \\ 1\times 1 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ベクトルに、行列$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$をかけると、$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ベクトルとなる。

このような、行列によるベクトルの変換を、**1 次変換**という。この 1 次変換は次のようなものである。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 + 1\times 0 \\ 1\times 1 + 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 0 + 1\times 1 \\ 1\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

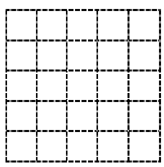


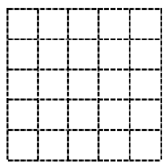
ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で囲まれた正方形は、ベクトル$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で囲まれた平行四辺形に変換される。

[練習問題]

1. 以下の行列による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で囲まれた正方形がどのような形に変換されるか、図に表してみよう。

① $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$





② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

[確認事項]

・特徴的な 1 次変換の例

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ … x 軸に関する対称変換

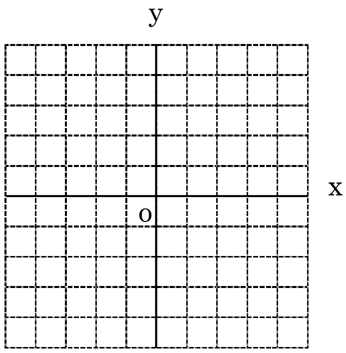
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ … y 軸に関する対称変換

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ … 原点に関する対称変換

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ … 原点まわり角度θ回転

[練習問題]

2. 以下の行列による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ で囲まれた平行四辺形がどのような形に変換されるか、右図に表してみよう。



① $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}\cos 90^o & -\sin 90^o\\\sin 90^o & \cos 90^o\end{pmatrix}$

[確認事項]

・面積の変化

行列$\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で囲まれた正方形は、ベクトル$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ で囲まれた平行四辺形に変換された。このとき、平行四辺形の面積は 5 となる。

一般に、行列$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で囲まれた正方形は、面積$ad-bc$ の平行四辺形に変換される。

[練習問題]

3. 以下の行列による 1 次変換で、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$で囲まれた正方形が変換される平行四辺形の面積を求めよ。

① $\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}-2 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}\cos 60^o & -\sin 60^o\\\sin 60^o & \cos 60^o\end{pmatrix}$