数学　配布資料

2015.6.29　担当：河田

＜第 10 回　行列と連立方程式＞

［基礎事項のチェック］

・行列

行列とは、数字を並べたもので、行と列からなっている。

右図のように行が 2 つ、列が 2 つある行列を、2 行 2 列の行列という。

行

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ 列

・行列の和・差

行列の和・差は、行列の形が同じ(行と列の数が等しい)ときに計算可能である。

このとき和・差は、各成分同士の和・差である。

(例)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

［練習問題］

1. 以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=$

・行列の積

a) 行列の定数倍は、各成分をすべて定数倍すればよい。

(例)

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

b) 行列の積は、かけられる行列の列の数と、かける行列の行の数が等しいときに計算可能である。

(例)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 1+1\times 2 \\ 4\times 1+3\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 1+0\times(-1) & 2\times 2+0\times 0 \\ 1\times 1+3\times(-1) & 1\times 2+3\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) 行列の積は、かける向きによって答えが異なる。(等しくなる時もある)

(例)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 1+0\times(-1) & 2\times 2+0\times 0 \\ 1\times 1+3\times(-1) & 1\times 2+3\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 2+2\times 1 & 1\times 0+2\times 3 \\ -1\times 2+0\times 1 & -1\times 0+0\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

[練習問題]

2. 以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

[基礎事項のチェック]

・連立方程式の行列表現

$$x + 3y = 5$$
$$3x - 2y = 4$$

という連立方程式があったとする。この連立方程式は、行列の積を使ってあらわすと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$とすると、$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$とあらわせる。

・逆行列

$2x = 6$という 1 次方程式を解くとき、6を2で割ることによって、$x = 3$という解が求まる。

一般に $\mathrm{a}x = b$であれば、$x = b \div a$として求めることができる。

しかし、$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$において$\mathbf{x}$を求める場合、$\mathbf{b}$を$\mathbf{A}$で割るという行列の割り算はできないため、$\mathbf{A}$の逆行列を**左から**かけることになる。

一般に、2 行 2 列の行列の逆行列は、$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

として求められる。

したがって$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$のとき、$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\times(-2)-3\times3}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$である。

[練習問題]

3. 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

・単位行列

行列の対角成分が 1、その他がすべて 0 の行列を単位行列といい、$\mathbf{I}$とあらわす。行と列の数の等しい行列は、同じ大きさの単位行列をかけても、もとの行列に等しい。($\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$)

(例)

$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$のとき、$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

なお、$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$となる。

［練習問題］

4. 次の行列に、3.で求めた逆行列、左からと右からそれぞれ掛けて、単位行列になることを確かめよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

・連立方程式の解

連立方程式を行列の考え方を用いて解くということは、$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$として$\mathbf{x}$を求めることである。すなわち、$\mathbf{b}$に$\mathbf{A}$の逆行列を**左から**かけることになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって、連立方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 \times 5 + (-3) \times 4 \\ -3 \times 5 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

［練習問題］

5. 以下の連立方程式を、行列の積の形で表し、逆行列を左からかけることによって解け。

(1) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y = 23 \\ 3x + 5y = -8 \end{cases}$