

<2次関数の最大最小>

・ 2次関数の最大値・最小値

・ 平方完成による方法

2次関数の最大値または最小値を求める方法として、平方完成による方法がある。

平方完成とは $y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ のように、変形する方法である。

たとえば、 $y = x^2 - 4x + 3$ という2次関数の最小値を、平方完成によって求めよう。

この数の半分の数がかつこの中に入る

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

↑
カッコを展開したものと、この数の和が元の定数項に等しくなるように

この2次関数は $x = 2$ において、最小値-1をとる。

[練習問題]

1. 次の2次関数を最小または最大にする x の値と、最小値または最大値を求めなさい。

① $y = x^2 - 2x + 8$

② $y = x^2 + 6x + 9$

③ $y = x^2 - 3x + 5$

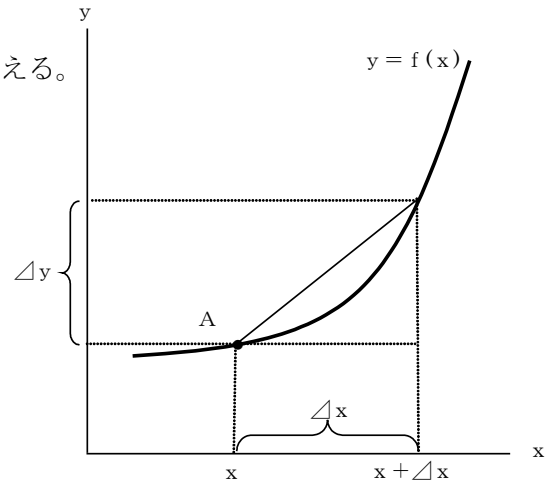
④ $y = -2x^2 - 4x - 8$

・微分

関数 $y = f(x)$ について、点Aでのこの関数の曲線の傾き $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。

Δx を限りなくゼロに近づけた時の $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ のことを、 y の x による微分という。これは、点Aにおける接線の傾きである。

y の x による微分は、 $\frac{dy}{dx}, y'$ などと表される。



・微分の計算方法

「肩を前に出して、肩を1つ下げる」

・ $y = 2x^3$ のとき、 $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} = 6x^2$

・ $y = 5x^2 + 2x + 9$ のとき、 $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot 2x^{1-1} = 10x + 2$

[練習問題]

2. 以下の各式について、 y を x で微分せよ。

① $y = 3x^2 + 5x + 2$

② $y = 4x^3 + 2x^2 + 6$

③ $y = 6x^4 - 2x^3 + 5x + 7$

④ $y = x^2 - 4x + 1$

・ 2 次関数の最大値・最小値

・ 微分による方法

2 次関数の最大値または最小値を求める方法として、微分による方法もある。

2 次関数が最大値または最小値をとるとき、右図のようにその接線は x 軸に平行な直線となる。このような直線の傾きは 0 である。すなわち、2 次関数を微分した式に、最大値または最小値をとるときの x を代入すると、その値は 0 となる。

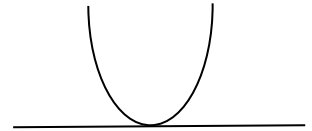
たとえば、 $y = x^2 - 4x + 3$ という 2 次関数の最小値を、微分によって求めよう。

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} - 4x^{1-1} = 2x - 4 \text{ であるので、} 2x - 4 = 0 \text{ のとき、この 2 次関数は最小となる。}$$

(最小か最大かは x の 2 乗の項の符号で判断できる)

すなわち、この 2 次関数は $x = 2$ のとき、最小となり、最小値は $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$ である。

2 次関数が最大または最小となるのは、このよう なときである。



[練習問題]

3. 次の 2 次関数を最小または最大にする x の値と、最小値または最大値を微分を用いて求めなさい。

① $y = x^2 - 2x + 8$

② $y = x^2 + 6x + 9$

③ $y = x^2 - 3x + 5$

④ $y = -2x^2 - 4x - 8$