計量経済学 参考資料
– DW 統計量についての補足 –

河田 正樹

2015 年 6 月 18 日

$DW \fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})$ について補足する。

準備 1　$Y = bX + u$ というモデルを考えたとき

$$\hat{b} = \frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$$

(証明)　残差 $e_i = Y_i - bX_i$ なので、残差 2 乗和を G とすると、

$$\begin{aligned} G &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= (Y_1 - bX_1)^2 + (Y_2 - bX_2)^2 + \cdots + (Y_n - bX_n)^2 \end{aligned}$$

これを b で偏微分し $=0$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial b} &= -2X_1(Y_1 - bX_1) - 2X_2(Y_2 - bX_2) - \cdots - 2X_n(Y_n - bX_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ b(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = (X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n) \\ &\Leftrightarrow\ \hat{b} = \frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} \end{aligned}$$

準備 2　$e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon$ において

$$\hat{\rho} = \frac{e_1e_2 + e_2e_3 + \cdots + e_{n-1}e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_{n-1}^2}$$

(証明)　**準備 1** の X を e_{t-1} と、Y を e_t とおきかえればよい。

DW 統計量

$$\begin{aligned} DW &= \frac{(e_2 - e_1)^2 + (e_3 - e_2)^2 + \cdots + (e_n - e_{n-1})^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \\ &= \frac{e_2^2 - 2e_1e_2 + e_1^2 + e_3^2 - 2e_2e_3 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 - 2e_{n-1}e_n + e_{n-1}^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \\ &= \frac{e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 + \cdots + 2e_{n-1}^2 + e_n^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} - 2\frac{e_1e_2 + e_2e_3 + \cdots + e_{n-1}e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \end{aligned}$$

n が大きいとき、

$$\frac{e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 + \cdots + 2e_{n-1}^2 + e_n^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \fallingdotseq 2, \quad \frac{e_1e_2 + e_2e_3 + \cdots + e_{n-1}e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \fallingdotseq \hat{\rho}$$

よって、 $DW \fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})$ となる。