

<第 10 回 行列と連立方程式(1)>

[基礎事項のチェック]

・ 行列

行列とは、数字を並べたもので、行と列からなっている。

右図のように行が 2 つ、列が 2 つある行列を、2 行 2 列の行列という。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

行
列

・ 行列の和・差

行列の和・差は、行列の形が同じ(行と列の数が等しい)ときに計算可能である。

このとき和・差は、各成分同士の和・差である。

(例)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

[練習問題]

1. 以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

・ 行列の積

行列の積は、かけられる行列の列の数と、かける行列の行の数が等しいときに計算可能である。

(例)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times -1 & 2 \times 2 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 3 \times -1 & 1 \times 2 + 3 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[練習問題]

2. 以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

[基礎事項のチェック]

- 連立方程式の行列表現

$$x + 3y = 5$$

$$3x - 2y = 4$$

という連立方程式があったとする。この連立方程式は、行列の積を使ってあらわすと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ とすると、 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ とあらわせる。

- 連立方程式の解

$$x + 3y = 5$$

$$3x - 2y = 4$$

という連立方程式を解くとき、行列の考え方をい用いることができる。 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ において、 \mathbf{x} を求めるには、 \mathbf{b} を \mathbf{A} で割ればよいが、行列の割り算はできないため、 \mathbf{A} の逆行列をかけることになる。

一般に、2行2列の行列の逆行列は、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。したがって、 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times (-2) - 3 \times 3} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ であることから、連立方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 \times 5 + (-3) \times 4 \\ -3 \times 5 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

[練習問題]

3. 以下の連立方程式を、逆行列を使って解け。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = 23 \\ 3x + 5y = -8 \end{cases}$$