ミクロ・マクロ経済学演習　復習問題（第 6 回）

2013.11.6　担当：河田

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名　模　範　解　答

※　11 月 11 日(月)17 時までに、河田研究室(514)まで提出すること。
※　途中の式や思考過程はそのままにしておくこと。

1.　次の式を計算せよ。

(1)　$K^{0.2} \times K^{0.5} = K^{(0.2+0.5)} = K^{0.7}$　(2)　$K^{\frac{2}{3}} \div K^{\frac{1}{3}} = K^{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)} = K^{\frac{1}{3}}$　(3)　$L^{0.5}K^{0.8} \div K^{0.2} = L^{0.5}K^{(0.8-0.2)} = L^{0.5}K^{0.6}$

$X^a \times X^b = X^{(a+b)}$　(例)　$2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^5 = 2^{(3+2)}$

$X^a \div X^b = X^{(a-b)}$　(例)　$2^3 \div 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \div (2 \times 2) = 2 = 2^{(3-2)}$

2.　$\left(\frac{K}{L}\right)^{0.5} = 4$ のとき、下の各式の値を求めよ。

(1)　$\left(\frac{L}{K}\right)^{0.5} = \frac{1}{\left(\frac{K}{L}\right)^{0.5}} = \frac{1}{4}$　(2)　$\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\left(\frac{K}{L}\right)^{0.5}\right)^2 = 4^2 = 16$　(3)　$\left(\frac{L}{K}\right)^{0.25} = \left(\left(\frac{L}{K}\right)^{0.5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{X}{y}\right)^a$は $\left(\frac{y}{x}\right)^a$ の逆数　(例)　$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$(X^a)^b = X^{(a \times b)}$

(例)　$(2^3)^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^6 = 2^{(3 \times 2)}$

3.　ある企業の生産関数が、

$$Y = K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$ (Y: 産出量、K: 資本量、L: 労働量)

で表されている。また、資本及び労働の要素価格はそれぞれ 3,16 である。この企業が産出量を 40 に固定したままで費用最小化を図った。この場合の最適資本量はいくらか。

1 :　60
2 :　65
3 :　70
4 :　75
5:　80

$$MPL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{4} \cdot K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{3}{4} \cdot K^{\frac{3}{4}-1}L^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$MPL = \frac{w}{P}$なので、$\frac{1}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{16}{P}$　$MPK = \frac{r}{P}$なので、$\frac{3}{4}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{P}$である。

（国Ⅱ　2010）

よって、$\frac{1}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3} \times \frac{3}{4}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$であり、$\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}} = 16\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$となる。

$$\frac{K^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{3}{4}}} = 16 \cdot \frac{L^{\frac{1}{4}}}{K^{\frac{1}{4}}} \Leftrightarrow K^{\frac{3}{4}} \cdot K^{\frac{1}{4}} = 16 \cdot L^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow K = 16L$$

となる。これを、生産関数に代入すると、$Y = (16L)^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} = \left((16L)^{\frac{1}{4}}\right)^3 L^{\frac{1}{4}} = \left(2L^{\frac{1}{4}}\right)^3 L^{\frac{1}{4}} = 8L^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 8L$

産出量を 40 に固定したまま、費用最小化しているので、$40 = 8L \Leftrightarrow L = 5$
$K = 16 \times 5 = 80$となり、最適資本量は 80 となる。

4.　完全競争市場で、ある財を生産する企業の総費用曲線が

$$\mathrm{TC} = \frac{2}{3}\mathrm{Y}^3 - 16\mathrm{Y}^2 + 140\mathrm{Y}$$（TC: 総費用, Y: 生産量）

で示されるとする。財の価格が 12 の時、この企業の利潤が最大にある産出量を求めなさい。

限界費用関数は、総費用関数を生産量 Y で微分して、

$$\mathrm{MC} = \frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{dY}} = 3\cdot\frac{2}{3}\mathrm{Y}^{2-1} - 2\cdot 16\mathrm{Y}^{2-1} + 1\cdot 140\mathrm{Y}^{1-1} = 2\mathrm{Y}^2 - 32\mathrm{Y} + 140$$

利潤最大化が成り立つには、限界費用＝価格のときであるので、

$$2\mathrm{Y}^2 - 32\mathrm{Y} + 140 = 12 \Leftrightarrow 2\mathrm{Y}^2 - 32\mathrm{Y} + 128 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Y}^2 - 16\mathrm{Y} + 64 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Y} - 8)^2 = 0$$

利潤が最大となる生産量は8である

5.　完全競争市場で、ある財を生産する企業の平均可変費用曲線が

$$\mathrm{AVC} = \mathrm{Y}^2 - 6\mathrm{Y} + 15$$（AVC: 総費用, Y: 生産量）

で示されるとする。財の価格が 30 の時、この企業の利潤が最大にある産出量を求めなさい。

（地方上級 改）

総費用関数を求める。固定費用を X とおき、平均可変費用関数を Y 倍した可変費用を加えると、

$$\mathrm{TC} = (\mathrm{Y}^2 - 6\mathrm{Y} + 15) \times \mathrm{Y} + \mathrm{X} = \mathrm{Y}^3 - 6\mathrm{Y}^2 + 15\mathrm{Y} + \mathrm{X}$$

$$\mathrm{MC} = \frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{dY}} = 3\cdot\mathrm{Y}^{3-1} - 2\cdot 6\mathrm{Y}^{2-1} + 1\cdot 15\mathrm{Y}^{1-1} = 3\mathrm{Y}^2 - 12\mathrm{Y} + 15$$

利潤最大化が成り立つには、限界費用＝価格のときであるので、

$$3\mathrm{Y}^2 - 12\mathrm{Y} + 15 = 30 \Leftrightarrow 3\mathrm{Y}^2 - 12\mathrm{Y} - 15 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Y}^2 - 4\mathrm{Y} - 5 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Y} - 5)(\mathrm{Y} + 1) = 0$$

よって、$\mathrm{Y} = -1{,}5$。この企業の利潤が最大となる生産量は5である。

6.　完全競争市場で、ある財を生産する企業の平均可変費用曲線が

$$\mathrm{AVC} = \frac{\mathrm{Y}^2}{3} - 2\mathrm{Y} + 5$$（AVC: 総費用, Y: 生産量）

であり、固定費用は 40 であるものとする。財の価格が 17 であるとき、この企業が利潤最大化を行った結果、得られる利潤はいくらになるか。

1 :　16
2 :　32
3 :　72
4 :　96
5 :　102

（裁判所事務官 2011 改）

総費用関数を求める。固定費用は 40 であり、とおき、平均可変費用関数を Y 倍した可変費用を加えると、

$$\mathrm{TC} = \left(\frac{\mathrm{Y}^2}{3} - 2\mathrm{Y} + 5\right) \times \mathrm{Y} + 40 = \frac{1}{3}\mathrm{Y}^3 - 2\mathrm{Y}^2 + 5\mathrm{Y} + 40$$

$$\mathrm{MC} = \frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{dY}} = 3\cdot\frac{1}{3}\mathrm{Y}^{3-1} - 2\cdot 2\mathrm{Y}^{2-1} + 1\cdot 5\mathrm{Y}^{1-1} = \mathrm{Y}^2 - 4\mathrm{Y} + 5$$

利潤最大化が成り立つには、限界費用＝価格のときであるので、

$$\mathrm{Y}^2 - 4\mathrm{Y} + 5 = 17 \Leftrightarrow \mathrm{Y}^2 - 4\mathrm{Y} - 12 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Y} - 6)(\mathrm{Y} + 2) = 0$$

よって、$\mathrm{Y} = -2{,}6$。この企業の利潤が最大となる生産量は6である。

この企業が得られる利潤$\pi = \mathrm{PY} - \mathrm{TC}$であるので、

$$17 \times 6 - \left(\frac{1}{3}\cdot 6^3 - 2\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 40\right)$$

$$= 102 - (72 - 72 + 30 + 40) = 102 - 70 = 32$$

得られる利潤は 32 である。