

ミクロ・マクロ経済学演習 復習問題(第3回)

2013.10.9 担当：河田

学籍番号 _____ 氏名 _____ 模範解答 _____

※ 10月14日(月)17時までに、河田研究室(514)まで提出すること。

※ 途中の式や思考過程はそのままにしておくこと。

1. 以下の各式について、 z を x と y でそれぞれ偏微分せよ。

(1) $z = 2xy^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 \cdot 2x^{1-1}y^2 \\ &= 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 2 \cdot 2xy^{2-1} \\ &= 4xy \end{aligned}$$

(2) $z = x(y - 4)$

$$\begin{aligned} z &= xy - 4x \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 \cdot x^{1-1}y - 1 \cdot 4x^{1-1} \\ &= y - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 1 \cdot xy^{1-1} \\ &= x \end{aligned}$$

(3) $z = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}} \\ &= x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1} \\ &= x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. ある消費者の効用関数が、 $U = xy^2$ (U : 効用、 x : X財の購入量、 y : Y財の購入量)で与えられている。X財の価格は2、Y財の価格は4である。このとき、消費者が125の効用水準を実現するために必要な所得の最小値はいくらか。

限界代替率を求めるために、 U を x と y とでそれぞれ偏微分する。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}y^2 = y^2 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \cdot xy^{2-1} = 2xy$$

よって限界代替率は、 $MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}$ となる。

これが2財の価格比に等しくなるので、 $\frac{y}{2x} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow y = x$ となる。

この式を効用関数に代入すると、

$$x \times x^2 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$$

ところで、所得を M とすると、X財の価格が2、Y財の価格が4であるので、予算制約線の式は $2x + 4y = M$ となる。

よって、 $x = 5$ を予算制約式に代入して、 $2 \times 5 + 4 \times 5 = 10 + 20 = 30$ となる。

必要な所得の最小値は30である。

3. ある家計の効用関数が、 $U = xy$ で表されるとする。この家計は 15000 円の予算で X 財、Y 財の 2 財の購入を計画し、X 財の価格は 300 円、Y 財の価格は 600 円であるとする。このとき、効用最大化をもたらす X 財の最適消費量 x_0 はいくらになるか。また、予算が一定で X 財の価格が 50%下落すると、X 財の最適消費量 x_1 はいくらになるか

	x_0	x_1	
1 :	10	17.5	$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}y = y$ $\frac{\partial U}{\partial y} = 1 \cdot xy^{1-1} = x$ より、 $MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{y}{x}$ となる。
2 :	10	37.5	
3 :	15	50	これが 2 財の価格比に等しくなるので、 $\frac{y}{x} = \frac{300}{600} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$ となる。
4 :	25	37.5	
⑤ :	25	50	予算制約線の式は $300x + 600y = 15000$ であるので、これに代入すると、 $300x + 600 \cdot \frac{1}{2}x = 15000 \Leftrightarrow 600x = 15000 \Leftrightarrow x = 25$

となる。よって、 $x_0 = 25$

X 財の価格が 50%下落すると、X 財の価格は 150 円となる。よって、これが 2 財の価格比に

等しくなるので、 $\frac{y}{x} = \frac{150}{600} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x$ となる。

予算制約線の式は $150x + 600y = 15000$ であるので、これに代入すると、

$$150x + 600 \cdot \frac{1}{4}x = 15000 \Leftrightarrow 300x = 15000 \Leftrightarrow x = 50$$

(国Ⅱ 2004)

となる。よって、 $x_1 = 50$

4. 所得のすべてを支出して X 財と Y 財を購入する消費者の効用関数が、

$$U = XY \quad (U: \text{効用水準}, X: X \text{ 財の購入量}, Y: Y \text{ 財の購入量})$$

で示されています。消費者の所得は 100、当初 X 財と Y 財の価格がそれぞれ 2 と 10 です。

X 財の価格が 2 から 8 に上昇した場合、この変化に対する補償所得（変化以前と同じ効用水準を実現するのに最小の所得）はいくらですか。

1 :	125	限界代替率を求めるために、U を X と Y とでそれぞれ偏微分する。すると、
2 :	150	$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \cdot X^{1-1}Y = Y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 1 \cdot XY^{1-1} = X$ 限界代替率は、 $MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{Y}{X} = \frac{Y}{X}$ となる。
3 :	175	

④: 200 これが 2 財の価格比に等しくなるので、 $\frac{Y}{X} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{5}X$ となる。

予算制約線の式は $2X + 10Y = 100$ であるので、これに代入すると、

$$2X + 10 \times \frac{1}{5}X = 100 \Leftrightarrow 2X + 2X = 100 \Leftrightarrow 4X = 100 \Leftrightarrow X = 25$$

となる。このときの効用水準は

$$U = XY = 25 \times \frac{1}{5} \times 25 = 25 \times 5 = 125$$

X 財の価格変化後の所得を M とすると、変化後の予算制約線の式は $8X + 10Y = M$ となる。

限界代替率が価格変化後の価格比に等しくなるので、 $\frac{Y}{X} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow Y = \frac{4}{5}X$ となる。これを効用関数に代入すると、

(国Ⅰ 改)

$$125 = XY \Leftrightarrow 125 = X \times \frac{4}{5} \times X = \frac{4}{5}X^2 \Leftrightarrow \frac{625}{4} = X^2 \Leftrightarrow \frac{25}{2} = X, \text{ これを予算制約式に代入し}$$

て、 $8 \times \frac{25}{2} + 10 \times \frac{4}{5} \times \frac{25}{2} = 100 + 100 = 200$ となる。必要な所得の最小値は 200 である。