ミクロ・マクロ経済学演習　復習問題（第 2 回）

2013.10.2　担当：河田

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名　　模　範　解　答

※　10 月 7 日(月)17 時までに、河田研究室(514)まで提出すること。
※　途中の式や思考過程はそのままにしておくこと。

1. 以下の各式について、y を x で微分せよ。

（1）$y = 2x^3 - 5x^2 + 20$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot 5x^{2-1}$$
$$= 6x^2 - 10x$$

（2）$y = 3x^4 - 2x^2 + 6x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^{4-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 \cdot 6x^{1-1}$$
$$= 12x^3 - 4x + 6$$

（3）$y = x^3 - 5x + 8$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^{3-1} - 1 \cdot 5x^{1-1}$$
$$= 3x^2 - 5$$

2. 以下の各式について、z を x と y でそれぞれ偏微分せよ。

（1）$z = 3xy^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot 3x^{1-1}y^3$$
$$= 3y^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cdot 3xy^{3-1}$$
$$= 9xy^2$$

（2）$z = x^2y + 5x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot x^{2-1}y + 1 \cdot 5x^{1-1}$$
$$= 2xy + 5$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot x^2y^{1-1}$$
$$= x^2$$

（3）$z = xy + 2x^2 + 3y + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}y + 2 \cdot 2x^{2-1}$$
$$= y + 4x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot xy^{1-1} + 1 \cdot 3y^{1-1}$$
$$= x + 3$$

3. ある家計の効用関数が、$U = xy^2$（U: 効用、x: X 財の購入量、y: Y 財の購入量)で与えられている。この家計は 6000 円の予算で X 財と Y 財の購入を計画している。X 財の価格は 100 円、Y 財の価格は 400 円である。
このとき、この家計がとり得る効用の最大値として正しいのはどれか。

1：　1000
2：　1200
3：　1500
4：　1800
5：　2000

（国Ⅱ　2006）

X 財の価格が 100 円、Y 財の価格が 400 円、所得が 6000 円であるので、予算制約線の式は $100X + 400Y = 6000$となる。
限界代替率を求めるために、U を X と Y とでそれぞれ偏微分する。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}y^2 = y^2 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \cdot xy^{2-1} = 2xy$$

よって限界代替率は、$MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}$ となる。

これが 2 財の価格比に等しくなるので、$\frac{y}{2x} = \frac{100}{400} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$となる。

この式と、予算制約式との連立方程式を解く。予算制約式に代入して、

$$100x + 400 \cdot \frac{1}{2}x = 6000 \Leftrightarrow 100x + 200x = 6000 \Leftrightarrow 300x = 6000 \Leftrightarrow x = 20$$

よって、効用最大化をもたらす X 財の最適消費量 は 20 であり、このときの効用は
$20 \times (\frac{1}{2} \times 20)^2 = 20 \times 100 = 2000$　となる。

4. ある消費者の効用関数が次のように与えられている。

$$u = xy$$

ここで、u は効用水準、x は X 財の消費量、y は Y 財の消費量を表す。X 財の価格は 4、Y 財の価格は 20 とする。このとき、消費者が 500 の効用水準を実現するために必要な所得の最小値はいくらか。

1 : 200
2 : 300
3 : 400
4 : 500
5 : 600

所得を M とすると、 X 財の価格が 4、Y 財の価格が 20 であるので、予算制約線の式は $4x + 20y = M$となる。

限界代替率を求めるために、U を x と y とでそれぞれ偏微分する。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \cdot x^{1-1}y = y \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 1 \cdot xy^{1-1} = x$$

よって限界代替率は、$MRS = \dfrac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \dfrac{y}{x}$ となる。

これが 2 財の価格比に等しくなるので、$\frac{y}{x} = \frac{4}{20} \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x$となる。

この式を効用関数に代入すると、

$$x \times \frac{1}{5}x = 500 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2 = 500 \Leftrightarrow x^2 = 2500 \Leftrightarrow x = 50$$

（国Ⅱ　2009）

よって、予算制約式に代入して、$4 \times 50 + 20 \times \frac{1}{5} \times 50 = 200 + 200 = 400$。