ミクロ･マクロ経済学演習　配布資料

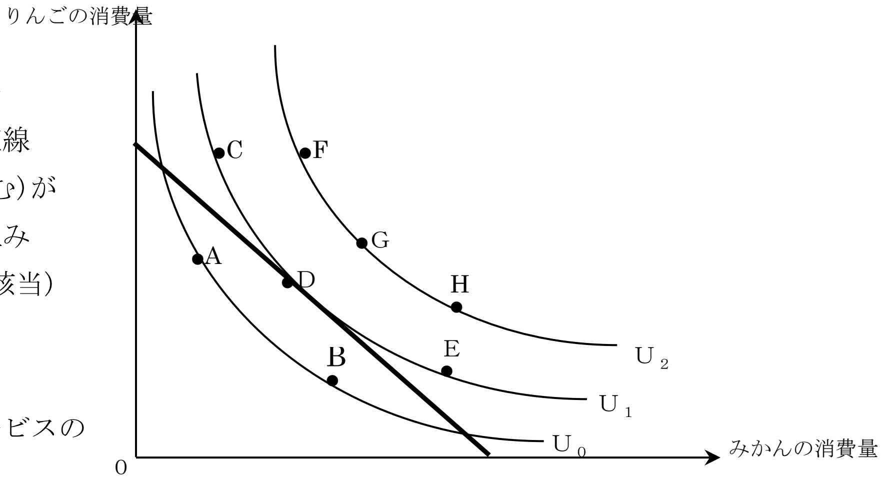
2013.10.2　担当：河田

＜第 2 回　最適消費･微分＞

［基礎事項のチェック］　（参考資料：『ミクロ経済学』授業ノート(18)、
(予算制約線は(13)、無差別曲線は(16)、(17)も参照のこと))

・**予算制約線**

⇒所得および 2 つの財・サービスの価格が与えられているとき、購入可能な財・サービスの組み合わせを示した直線
この直線の左下側(線上を含む)が購入可能な財・サービスの組み合わせとなる。（点 A,B,D が該当）



・**無差別曲線**

⇒同じ効用が得られる財・サービスの購入量を結んだ曲線
同じ曲線上の点の効用は等しく、右上方になるほど、効用は大きくなる。

・最適消費点

⇒予算制約のもとで、効用が最大となる購入量の組み合わせは、予算制約線と無差別曲線との接点
（点 D が該当）

［例題］

X 財と Y 財を消費するある個人の効用関数が、

$$U = x^2y^3$$

で示され、この個人の所得が 100、X 財と Y 財の価格がそれぞれ 5,10 であるとする。

①　この個人の予算制約線の式を求めよ。

②　この個人が効用を最大化するときの X 財と Y 財の需要量を求めよ。　（国Ⅱ改）

(解)　① X 財の価格が 5、Y 財の価格が 10、所得が 100 であるので、予算制約線の式は

$$5x + 10y = 100$$

となる。

② この問題を求めるには、「限界代替率」という概念が必要であり、その導出には、微分・偏微分が使われる。

［新しい概念］

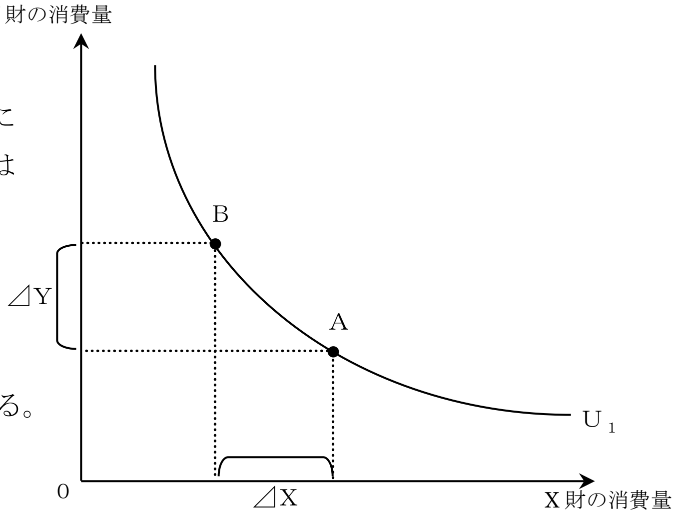
・限界代替率

⇒X 財を１単位増やしたときに、効用を一定にたもつには、Y 財をどれだけ減らさなくてはならないか。

$$限界代替率(MRS) = -\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

と定義される。

限界代替率は、無差別曲線の接線の傾きである。



限界代替率は、２財の限界効用の比に等しい。

$$MRS = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}$$

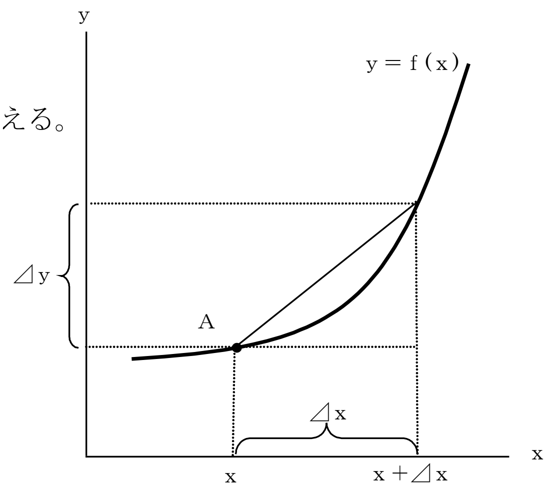
限界効用は、数学的には、U を X,Y でそれぞれ偏微分したものである。

・微分

関数$y = f(x)$について、点Ａでのこの関数の曲線の傾き$\frac{\Delta y}{\Delta x}$を考える。

Δxを限りなくゼロに近づけた時の$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ のことを、y の x による微分という。これは、点Ａにおける接線の傾きである。

y の x による微分は、$\frac{dy}{dx}, y'$ などと表される。



・微分の計算方法

「肩を前に出して、肩を１つ下げる」

・$y = 2x^3$ のとき、$\frac{dy}{dx} = 3・2x^{3-1} = 6x^2$

・$y = 5x^2 + 2x + 9$ のとき、$\frac{dy}{dx} = 2・5x^{2-1} + 1・2x^{1-1} = 10x + 2$

［練習問題］　以下の各式について、y を x で微分せよ。

（1）$y = 4x^3 + 2x^2 + 6$　（2）$y = 6x^4 - 2x^3 + 5x + 7$　（3）$y = x^2 - 4x + 1$

・偏微分とその計算方法

偏微分は、変数が 3 つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分である。たとえば、$z = 5x^2y^4$を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 5x^{2-1}y^4 = 10xy^4$$

となる。

また、この z は y でも偏微分することができ、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot 5x^2y^{4-1} = 20x^2y^3$$

となる。

[練習問題]　以下の各式について、z を x と y でそれぞれ偏微分せよ。

(1) $z = 4x^3y^2$　(2) $z = 2x^3y + 4$　(3) $z = xy + 5x + 5y$

[例題のつづき]

X 財と Y 財を消費するある個人の効用関数が、

$$U = x^2y^3$$

で示され、この個人の所得が 100、X 財と Y 財の価格がそれぞれ 5,10 であるとする。

②　この個人が効用を最大化するときの X 財と Y 財の需要量を求めよ。　(国Ⅱ改)

(解)　最適消費点では、「予算制約線の傾き」＝「無差別曲線の接線の傾き」となる。

すなわち、「予算制約線の傾き」＝「2 財の価格比 $\frac{P_x}{P_Y}$」が、限界代替率と等しくなるとき、最適消費点となる。

限界代替率を求めるために、U を x と y とでそれぞれ偏微分する。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2 \cdot x^{2-1}y^3 = 2xy^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3 \cdot x^2y^{3-1} = 3x^2y^2$$

よって限界代替率は、$\mathrm{MRS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{2xy^3}{3x^2y^2} = \frac{2y}{3x}$ となる。

これが2財の価格比に等しくなるので、$\frac{2y}{3x} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$となる。

この式と、予算制約式との連立方程式を解く。予算制約式に代入して、

$$5x + 10 \cdot \frac{3}{4}x = 100 \Leftrightarrow 5x + 7.5x = 100 \Leftrightarrow 12.5x = 100 \Leftrightarrow x = 8$$

$$y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

よって、x財の需要量 は8、y財の需要量 は6と求まる。

［練習問題］

1. ある合理的な消費行動をとる消費者が、所得のすべてをX財、Y財の購入に支出し、この消費者の効用関数は、

$U = X^2Y$（U: 効用水準、X: X財の消費量、Y: Y財の消費量）

で示されるとする。この消費者の所得は45000円、X財の価格は1000円、Y財の価格は1500円であるとき、効用最大化をもたらすX財の最適消費量はどれか。

1： 18
2： 21
3： 24
4： 27
5： 30

（特別区　2008）

2. 2財x,yを消費するある個人の効用関数が

$U = xy^3$（U: 効用水準、x: x財の消費量、y: y財の消費量）

で表されるとする。また、x財の価格は2、y財の価格は3であり、この個人は所得Mを与えられている。この個人が所得Mを用いて効用を最大にする各財の消費量を選択すると128の効用を得られるとき、Mの値として最も適当なのはどれか。

1： 12
2： 16
3： 24
4： 32
5： 48

（裁判所事務官　2009）

[理論的な補足]

※　この部分は最適消費問題の解法に関して、理論的な補足をおこなったものです。この部分を見て、「わけがわからなくなった」人は、ここの部分は忘れて、解法の手順だけをしっかり覚えてください。

・予算制約線の傾きと価格比

予算制約式は X 財の価格をP_x、Y 財の価格をP_Y、所得を M とすると、

$$P_xX + P_YY = M \cdots ①$$

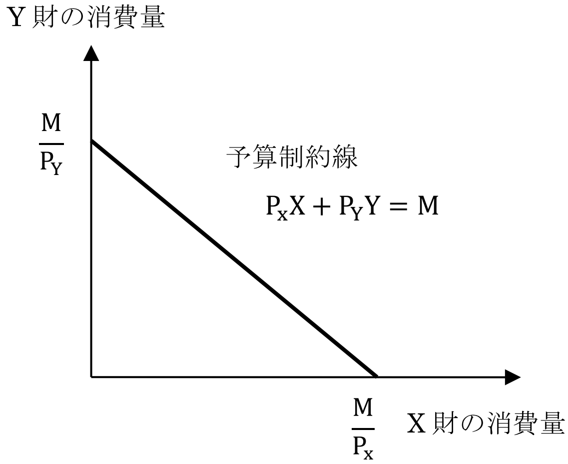
と定義される。

すべて X 財を購入するなら、①に Y=0 を代入するので、

$P_xX = M$　これを X について解くと、$X = \frac{M}{P_x}$

また、すべて Y 財を購入するなら、①に X=0 を代入するので、$P_YY = M$　これを Y について解くと、$Y = \frac{M}{P_Y}$

予算制約線の傾きを考えると、X 財が$\frac{M}{P_x}$増加したとき、Y 財は$\frac{M}{P_Y}$減少するので、傾きは$-\frac{M}{P_Y}\Big/\frac{M}{P_x} = -\frac{M}{P_Y} \times \frac{P_x}{M} = -\frac{P_x}{P_Y}$となる。(よって絶対値を考えると$\frac{P_x}{P_Y}$)



・限界代替率と偏微分、全微分

偏微分は変数が 3 つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分であった。しかし、「x が変化すると、それにともなって y も変化し、最終的に z が変化する」といった状況が考えられる。それは、全微分といわれるものである。

・全微分

$z = f(x, y)$ のとき、これを全微分すると、$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ となる。

・効用関数の全微分と限界代替率

効用関数は、$u = f(x, y)$ の形であらわされる関数である。なので、これを全微分すると、

$du = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ …②となる。

ところで、限界代替率$(\mathrm{MRS})=-\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ であった。ここで、最適消費点においてΔxを限りなくゼロに近づけた時に、限界代替率は$-\frac{dy}{dx}$となる。

また、限界代替率は定義より、「X 財を 1 単位増やしたときに、**効用を一定にたもつ**には、Y 財をどれだけ減らさなくてはならないか。」をあらわしたものであるので、効用(u)は変化しない。すなわち、$du=0$である。

②において、$du=0$が成り立つと、

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dy}{dx}$$

となる。以上から、$\mathrm{MRS}=\frac{MU_X}{MU_Y}=\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}$が成り立つ。

よって、最適消費を求めるには、$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}=\frac{P_x}{P_Y}$によって、Y と X の関係(Y=〇X)を求めることが、出発点となる。