

# 計量経済学 参考資料

## － 最小2乗パラメータ推定値の導出 (3変数の場合) －

河田 正樹

2013年 6月 5日

### 1 3変数の場合

説明変数が2つの重回帰モデル

$$Y_i = a + bX_i + cW_i + u_i$$

の回帰係数 (パラメータともいう) の推定値は、実績値 ( $Y_i$ ) から予測値 ( $\hat{Y}_i$ ) を引いた残差  $e_i$  の2乗和を最小にするような  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  である。

残差の2乗和 (これを  $G$  とあらわす) は、

$$G = (Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1)^2 + (Y_2 - \hat{a} - \hat{b}X_2 - \hat{c}W_2)^2 + \cdots + (Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)^2$$

となる。この  $G$  を  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  でそれぞれ偏微分し、0に等しいとおいた解の  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  が、求める推定値である。

残差平方和  $G$  を  $\hat{a}$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{a}} &= -2(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + (Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \quad (1)$$

$G$  を  $\hat{b}$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{b}} &= -2X_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2X_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{X_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + X_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \quad (2)$$

$G$  を  $\hat{c}$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{c}} &= -2W_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2W_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{W_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + W_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

(1) 式の  $\{\}$  内を  $=0$  とし、 $\hat{a}$  の項と  $X_i$  の項を右辺に移行すると、

$$Y_1 + \cdots + Y_n = n\hat{a} + \hat{b}(X_1 + \cdots + X_n) + \hat{c}(W_1 + \cdots + W_n) \quad (4)$$

(2) 式の  $\{\}$  内を  $=0$  とし、展開した  $X_i$  の項と  $X_i^2$  の項と  $X_iW_i$  の項を右辺に移行すると、

$$X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n = \hat{a}(X_1 + \cdots + X_n) + \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) \quad (5)$$

(3) 式の  $\{\}$  内を  $=0$  とし、展開した  $X_i$  の項と  $X_iW_i$  の項と  $W_i^2$  の項を右辺に移行すると、

$$W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n = \hat{a}(W_1 + \cdots + W_n) + \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \quad (6)$$

となる。この (4)(5)(6) 式が正規方程式である。

(4) 式を  $\hat{a}$  について解くと

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - \hat{b} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \hat{c} \frac{W_1 + \cdots + W_n}{n} \\ &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W}\end{aligned}\quad (7)$$

これを (5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n &= (\bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W})(X_1 + \cdots + X_n) + \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) \\ X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n - n\bar{X}\bar{Y} &= \hat{b}\{(X_1^2 + \cdots + X_n^2) - n\bar{X}^2\} + \hat{c}\{(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) - n\bar{X}\bar{W}\} \\ S_{xy} &= \hat{b}S_x^2 + \hat{c}S_{xw}\end{aligned}\quad (8)$$

また (6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n &= (\bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W})(W_1 + \cdots + W_n) + \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \\ W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n - n\bar{W}\bar{Y} &= \hat{b}\{(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) - n\bar{X}\bar{W}\} + \hat{c}\{(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - n\bar{W}^2\} \\ S_{wy} &= \hat{b}S_{xw} + \hat{c}S_w^2\end{aligned}\quad (9)$$

(8) 式に  $S_{xw}$  をかけたものと、(9) 式に  $S_x^2$  をかけたものを比べると、

$$S_{xy}S_{xw} = \hat{b}S_x^2S_{xw} + \hat{c}(S_{xw})^2 \quad (10)$$

$$S_x^2S_{wy} = \hat{b}S_x^2S_{xw} + \hat{c}S_x^2S_w^2 \quad (11)$$

(11) 式から (10) 式を引くと

$$S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw} = \hat{c}(S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2)$$

となる。よって  $\hat{c}$  は

$$\hat{c} = \frac{S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \quad (12)$$

また、(8) 式に  $S_w^2$  をかけたものと、(9) 式に  $S_{xw}$  をかけたものを比べると、

$$S_{xy}S_w^2 = \hat{b}S_x^2S_w^2 + \hat{c}S_{xw}S_w^2 \quad (13)$$

$$S_{xw}S_{wy} = \hat{b}(S_{xw})^2 + \hat{c}S_{xw}S_w^2 \quad (14)$$

(13) 式から (14) 式を引くと

$$S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy} = \hat{b}(S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2)$$

となる。よって  $\hat{b}$  は

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \quad (15)$$

となる。

よって、(7)(15)(12) 式をまとめて、

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W} \\ \hat{b} &= \frac{S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \\ \hat{c} &= \frac{S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2}\end{aligned}$$

が 3 変数の場合のパラメータ推定値となる。

## 2 回帰平面が原点を通るケース

説明変数が 2 つの重回帰モデルの特殊ケースとして、回帰平面が原点を通るケースを考えよう。モデルは

$$Y_i = bX_i + cW_i + u_i$$

となる。このモデルの回帰係数 (パラメータともいう) の推定値は、実績値 ( $Y_i$ ) から予測値 ( $\hat{Y}_i$ ) を引いた残差  $e_i$  の 2 乗和を最小にするような  $\hat{b}, \hat{c}$  である。

残差の 2 乗和 (これを  $G$  とあらわす) は、

$$G = (Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1)^2 + (Y_2 - \hat{b}X_2 - \hat{c}W_2)^2 + \cdots + (Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)^2$$

となる。この  $G$  を  $\hat{b}, \hat{c}$  でそれぞれ偏微分し、0 に等しいとおいた解の  $\hat{b}, \hat{c}$  が、求める推定値である。

残差 2 乗和  $G$  を  $\hat{b}$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{b}} &= -2X_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2X_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{X_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + X_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \quad (16)$$

$G$  を  $\hat{c}$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{c}} &= -2W_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2W_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{W_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + W_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \quad (17)$$

(16) 式の  $\{\}$  内を  $= 0$  とし、展開した  $X_i^2$  の項と  $X_iW_i$  の項を右辺に移行すると、

$$X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n = \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) \quad (18)$$

(17) 式の  $\{\}$  内を  $= 0$  とし、展開した  $X_iW_i$  の項と  $W_i^2$  の項を右辺に移行すると、

$$W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n = \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \quad (19)$$

となる。この (18)(19) 式が正規方程式である。

(18) 式に  $(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)$  をかけたものと、(19) 式に  $(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$  をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned} (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n) \\ = \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) \\ = \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式から (20) 式を引くと

$$\begin{aligned} (X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n) \\ = \hat{c}\{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)^2\} \end{aligned}$$

となる。よって  $\hat{c}$  は

$$\hat{c} = \frac{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)^2} \quad (22)$$

また (18) 式に  $(W_1^2 + \cdots + W_n^2)$  をかけたものと、(19) 式に  $(X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)$  をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned} & (W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n) \\ &= \hat{b}(W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(W_1 Y_1 + \cdots + W_n Y_n) \\ &= \hat{b}(X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)^2 + \hat{c}(X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \end{aligned} \quad (24)$$

(23) 式から (24) 式を引くと

$$\begin{aligned} & (W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(W_1 Y_1 + \cdots + W_n Y_n) \\ &= \hat{b}\{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)^2\} \end{aligned}$$

となる。よって  $\hat{b}$  は

$$\hat{b} = \frac{(W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(W_1 Y_1 + \cdots + W_n Y_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)^2} \quad (25)$$

となる。

よって、(25)(22) 式をまとめて、

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{(W_1^2 + \cdots + W_n^2)(X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(W_1 Y_1 + \cdots + W_n Y_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)^2} \\ \hat{c} &= \frac{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1 Y_1 + \cdots + W_n Y_n) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)(X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1 W_1 + \cdots + X_n W_n)^2} \end{aligned}$$

が回帰平面が原点を通る場合のパラメータ推定値となる。