

計量経済学 参考資料

－ DW 統計量についての補足 －

河田 正樹

2013 年 6 月 26 日

$DW \doteq 2(1 - \hat{\rho})$ について補足する。

準備 1 $Y = bX + u$ というモデルを考えたとき

$$\hat{b} = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$$

(証明) 残差 $e_i = Y_i - bX_i$ なので、残差 2 乗和を G とすると、

$$\begin{aligned} G &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= (Y_1 - bX_1)^2 + (Y_2 - bX_2)^2 + \cdots + (Y_n - bX_n)^2 \end{aligned}$$

これを b で偏微分し $= 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial b} &= -2X_1(Y_1 - bX_1) - 2X_2(Y_2 - bX_2) - \cdots - 2X_n(Y_n - bX_n) = 0 \\ \Leftrightarrow b(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) &= (X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n) \\ \Leftrightarrow \hat{b} &= \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} \end{aligned}$$

準備 2 $e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon$ において

$$\hat{\rho} = \frac{e_1 e_2 + e_2 e_3 + \cdots + e_{n-1} e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_{n-1}^2}$$

(証明) 準備 1 の X を e_{t-1} と、 Y を e_t とおきかえればよい。

DW 統計量

$$\begin{aligned} DW &= \frac{(e_2 - e_1)^2 + (e_3 - e_2)^2 + \cdots + (e_n - e_{n-1})^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \\ &= \frac{e_2^2 - 2e_1 e_2 + e_1^2 + e_3^2 - 2e_2 e_3 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 - 2e_{n-1} e_n + e_{n-1}^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \\ &= \frac{e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 + \cdots + 2e_{n-1}^2 + e_n^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} - 2 \frac{e_1 e_2 + e_2 e_3 + \cdots + e_{n-1} e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \end{aligned}$$

n が大きいとき、

$$\frac{e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 + \cdots + 2e_{n-1}^2 + e_n^2}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \doteq 2, \quad \frac{e_1 e_2 + e_2 e_3 + \cdots + e_{n-1} e_n}{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \doteq \hat{\rho}$$

よって、 $DW \doteq 2(1 - \hat{\rho})$ となる。