

統計学 補助資料 – 確率変数の分散 –

担当: 河田

2011 年 5 月 21 日

確率変数 x の分散は

$$V(x) = \sum (x - E(x))^2 P(x) \quad (\text{定義式})$$

であるが、実際の計算のときには

$$V(x) = \sum x^2 P(x) - (E(x))^2 \quad (\text{計算式})$$

という式を用いた方が計算が簡単になることが多い。

証明 定義式は正確に書くと次のように書ける。

$$V(x) = \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

この式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\ &= \sum \{x_i^2 - 2x_i E(x) + (E(x))^2\} P(x_i) \\ &= \sum \{x_i^2 P(x_i) - 2x_i E(x) P(x_i) + (E(x))^2 P(x_i)\} \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - \sum 2x_i E(x) P(x_i) + \sum (E(x))^2 P(x_i) \quad (\sum (Y_i + Z_i) = \sum Y_i + \sum Z_i \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x) \sum x_i P(x_i) + (E(x))^2 \sum P(x_i) \quad (\sum aY_i = a \sum Y_i \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x)E(x) + (E(x))^2 \quad (\sum x_i P(x_i) = E(x), \sum P(x_i) = 1 \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2(E(x))^2 + (E(x))^2 \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \end{aligned}$$

例 1 サイコロを 3 回ふり、1 の目が出た回数を x とする例において、定義式と計算式で分散を計算してみる。なお、 $E(x) = \frac{1}{2}$ が既に求められているものとする。

定義式による計算

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\ &= (0 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{125}{216} + (1 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{75}{216} + (2 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{15}{216} + (3 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{125}{216} + \frac{1}{4} \times \frac{75}{216} + \frac{9}{4} \times \frac{15}{216} + \frac{25}{4} \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{125}{864} + \frac{75}{864} + \frac{135}{864} + \frac{25}{864} = \frac{360}{864} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

計算式による計算

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \\ &= 0^2 \times \frac{125}{216} + 1^2 \times \frac{75}{216} + 2^2 \times \frac{15}{216} + 3^2 \times \frac{1}{216} - (\frac{1}{2})^2 \\ &= 0 + \frac{75}{216} + \frac{60}{216} + \frac{9}{216} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{144}{216} - \frac{1}{4} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

例 2 第 10 回練習問題 3 番を、計算式を用いて計算してみる。(2 番で、 $E(x) = 7$ が求められている。)

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \\ &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + 6^2 \times \frac{5}{36} + 7^2 \times \frac{6}{36} \\ &\quad + 8^2 \times \frac{5}{36} + 9^2 \times \frac{4}{36} + 10^2 \times \frac{3}{36} + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} - 7^2 \\ &= \frac{4}{36} + \frac{18}{36} + \frac{48}{36} + \frac{100}{36} + \frac{180}{36} + \frac{294}{36} + \frac{320}{36} + \frac{324}{36} + \frac{300}{36} + \frac{242}{36} + \frac{144}{36} - 49 \\ &= \frac{1974}{36} - 49 = 54.8333 - 49 = 5.83 \end{aligned}$$