ミクロ・マクロ経済学演習　補足資料

2012.10.17　担当：河田

この資料は最適消費問題の解法に関して、理論的な補足をおこなったものです。この資料を見て、「わけがわからなくなった」人は、解法の手順だけをしっかり覚えて、その他のところは忘れてください。

［最適消費問題の解法］

最適消費点では、「予算制約線の傾き」＝「無差別曲線の接線の傾き」となる。そのため、次のような手順で問題を解くことができる。

1)　効用関数について、U を X,Y でそれぞれ偏微分して限界効用を求め、その比から

$$\mathrm{MRS}=\frac{\mathrm{MU_X}}{\mathrm{MU_Y}}=\frac{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}}}{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Y}}}$$

として、限界代替率を求める。(限界代替率は X と Y の式になる。)

2)　$\mathrm{MRS}=\frac{\mathrm{P_x}}{\mathrm{P_Y}}$ という関係から、Y と X の関係(Y=○X)を求める。

3)　予算制約線の式(問題によっては効用関数の式)に 2)で求めた Y と X の関係を代入して、X の最適消費量を求める。

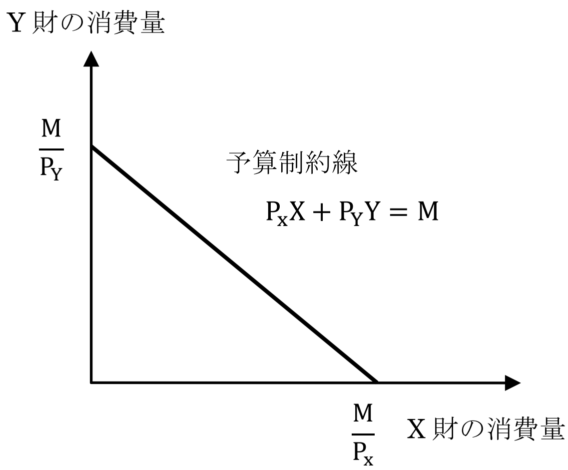
4)　問題の設定によって、効用関数や予算制約線の式に X の最適消費量を代入し、最終的な解答を求める。

［補足その１］予算制約線の傾きと価格比

予算制約式は X 財の価格を$\mathrm{P_x}$、Y 財の価格を$\mathrm{P_Y}$、所得を M とすると、

$$\mathrm{P_xX}+\mathrm{P_YY}=\mathrm{M}\cdots①$$

と定義される。



すべて X 財を購入するとすると、①に Y=0 を代入するので、

$\mathrm{P_xX}=\mathrm{M}$　これを X について解くと、$\mathrm{X}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_x}}$

また、すべてべて Y 財を購入するなら、①に X=0 を代入するので、$\mathrm{P_YY}=\mathrm{M}$　これを Y について解くと、$\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_Y}}$

予算制約線の傾きを考えると、X 財が$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_x}}$増加したとき、Y 財は$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_Y}}$減少するので、傾きは$-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_Y}}\Big/\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_x}}=-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P_Y}}\times\frac{\mathrm{P_x}}{\mathrm{M}}=-\frac{\mathrm{P_x}}{\mathrm{P_Y}}$となる。(よって絶対値を考えると$\frac{\mathrm{P_x}}{\mathrm{P_Y}}$)

［補足その 2］限界代替率と偏微分、全微分

偏微分は変数が 3 つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分であった。しかし、「x が変化すると、それにともなって y も変化し、最終的に z が変化する」といった状況が考えられる。それは、全微分といわれるものである。

・全微分

$z = f(x, y)$ のとき、これを全微分すると、$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ となる。

・効用関数の全微分と限界代替率

効用関数は、$u = f(x, y)$ の形であらわされる関数である。なので、これを全微分すると、

$du = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ …②となる。

ところで、限界代替率$(MRS) = -\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ であった。ここで、最適消費点においてΔxを限りなくゼロに近づけた時に、限界代替率は$-\frac{dy}{dx}$となる。

また、限界代替率は定義より、「X 財を 1 単位増やしたときに、**効用を一定にたもつ**には、Y 財をどれだけ減らさなくてはならないか。」をあらわしたものであるので、効用(u)は変化しない。すなわち、$du = 0$である。

②において、$du = 0$が成り立つと、

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx = -\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dy}{dx}$$

となる。以上から、$MRS = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}$が成り立つ。

よって、最適消費を求めるには、$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{P_x}{P_Y}$によって、Y と X の関係(Y=〇X)を求めることが、出発点となる。