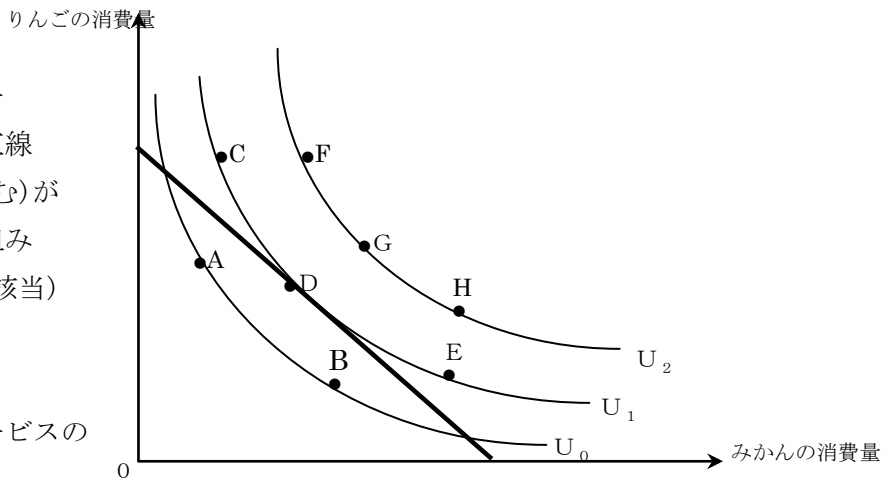


<第3回 最適消費・微分>

[基礎事項のチェック] (参考資料：『ミクロ経済学』授業ノート(18)、
(予算制約線は(13)、無差別曲線は(16)、(17)も参照のこと))

・ 予算制約線

⇒ 所得および2つの財・サービスの価格が与えられているとき、購入可能な財・サービスの組み合わせを示した直線
この直線の左下側(線上を含む)が購入可能な財・サービスの組み合わせとなる。(点A, B, Dが該当)



・ 無差別曲線

⇒ 同じ効用が得られる財・サービスの購入量を結んだ曲線
同じ曲線上の点の効用は等しく、右上方になるほど、効用は大きくなる。

・ 最適消費点

⇒ 予算制約のもとで、効用が最大となる購入量の組み合わせは、予算制約線と無差別曲線との接点
(点Dが該当)

[例題]

X財とY財を消費するある個人の効用関数が、

$$U = x^2y^3$$

で示され、この個人の所得が100、X財とY財の価格がそれぞれ5,10であるとする。

- ① この個人の予算制約線の式を求めよ。
- ② この個人が効用を最大化するときのX財とY財の需要量を求めよ。 (国II改)

(解) ① X財の価格が5、Y財の価格が10、所得が100であるので、予算制約線の式は

$$5x + 10y = 100$$

となる。

② この問題を求めるには、「限界代替率」という概念が必要であり、その導出には、微分・偏微分が使われる。

[新しい概念]

・限界代替率

⇒X財を1単位増やしたときに、効用を一定にたもつには、Y財をどれだけ減らさなくてはならないか。

$$\text{限界代替率(MRS)} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

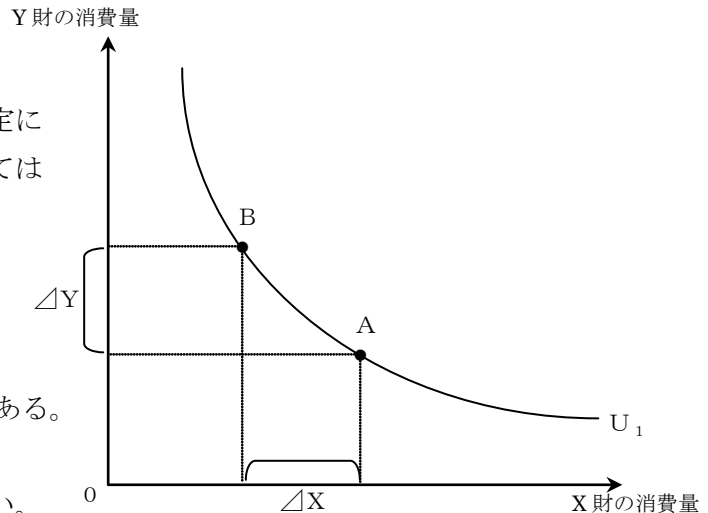
と定義される。

限界代替率は、無差別曲線の接線の傾きである。

限界代替率は、2財の限界効用の比に等しい。

$$\text{MRS} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}$$

限界効用は、数学的には、UをX,Yでそれぞれ偏微分したものである。

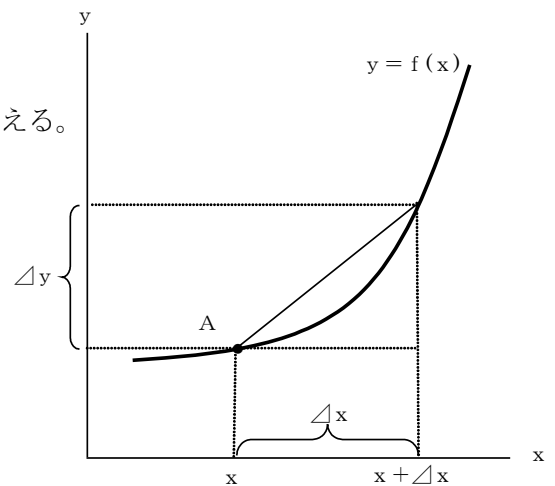


・微分

関数 $y = f(x)$ について、点Aでのこの関数の曲線の傾き $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。

Δx を限りなくゼロに近づけた時の $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ のことを、yのxによる微分という。これは、点Aにおける接線の傾きである。

yのxによる微分は、 $\frac{dy}{dx}, y'$ などと表される。



・微分の計算方法

「肩を前に出して、肩を1つ下げる」

・ $y = 2x^3$ のとき、 $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} = 6x^2$

・ $y = 5x^2 + 2x + 9$ のとき、 $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot 2x^{1-1} = 10x + 2$

[練習問題] 以下の各式について、yをxで微分せよ。

(1) $y = 4x^3 + 2x^2 + 6$

(2) $y = 6x^4 - 2x^3 + 5x + 7$

(3) $y = x^2 - 4x + 1$

・偏微分とその計算方法

偏微分は、変数が3つ以上の式において、他の変数は変化しないと考えて(定数とみなして)おこなう微分である。たとえば、 $z = 5x^2y^4$ を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 5x^{2-1}y^4 = 10xy^4$$

となる。

また、この z は y でも偏微分することができ、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot 5x^2y^{4-1} = 20x^2y^3$$

となる。

[練習問題] 以下の各式について、 z を x と y でそれぞれ偏微分せよ。

(1) $z = 4x^3y^2$

(2) $z = 2x^3y + 4$

(3) $z = xy + 5x + 5y$

[例題のつづき]

X財とY財を消費するある個人の効用関数が、

$$U = x^2y^3$$

で示され、この個人の所得が100、X財とY財の価格がそれぞれ5,10であるとする。

② この個人が効用を最大化するときのX財とY財の需要量を求めよ。(国Ⅱ改)

(解) 最適消費点では、「予算制約線の傾き」＝「無差別曲線の接線の傾き」となる。

すなわち、「予算制約線の傾き」＝「2財の価格比 $\frac{P_X}{P_Y}$ 」が、限界代替率と等しくなるとき、最適

消費点となる。

限界代替率を求めるために、 U を X と Y とでそれぞれ偏微分する。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2 \cdot x^{2-1}y^3 = 2xy^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3 \cdot x^2y^{3-1} = 3x^2y^2$$

よって限界代替率は、 $MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{2xy^3}{3x^2y^2} = \frac{2y}{3x}$ となる。

これが 2 財の価格比に等しくなるので、 $\frac{2y}{3x} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$ となる。

この式と、予算制約式との連立方程式を解く。予算制約式に代入して、

$$5x + 10 \cdot \frac{3}{4}x = 100 \Leftrightarrow 5x + 7.5x = 100 \Leftrightarrow 12.5x = 100 \Leftrightarrow x = 8$$

$$y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

よって、x 財の需要量は 8、y 財の需要量は 6 と求まる。

[練習問題]

1. ある合理的な消費行動をとる消費者が、所得のすべてを X 財、Y 財の購入に支出し、この消費者の効用関数は、

$$U = X^2Y \quad (U: \text{効用水準、} X: X \text{ 財の消費量、} Y: Y \text{ 財の消費量})$$

で示されるとする。この消費者の所得は 45000 円、X 財の価格は 1000 円、Y 財の価格は 1500 円であるとき、効用最大化をもたらす X 財の最適消費量はどれか。

- 1 : 18
- 2 : 21
- 3 : 24
- 4 : 27
- 5 : 30

(特別区 2008)

2. 2 財 x,y を消費するある個人の効用関数が

$$U = xy^3 \quad (U: \text{効用水準、} x: x \text{ 財の消費量、} y: y \text{ 財の消費量})$$

で表されるとする。また、x 財の価格は 2、y 財の価格は 3 であり、この個人は所得 M を与えられている。この個人が所得 M を用いて効用を最大にする各財の消費量を選択すると 128 の効用を得られるとき、M の値として最も適当なのはどれか。

- 1 : 12
- 2 : 26
- 3 : 24
- 4 : 32
- 5 : 48

(裁判所事務官 2009)