統計学 補助資料 – 確率変数の分散 –

担当: 河田

2010 年 5 月 17 日

確率変数 x の分散は

$$V(x) = \sum (x - E(x))^2 P(x) \quad \text{(定義式)}$$

であるが、実際の計算のときには

$$V(x) = \sum x^2 P(x) - (E(x))^2 \quad \text{(計算式)}$$

という式を用いた方が計算が簡単である。

証明　定義式は正確に書くと次のように書ける。

$$V(x) = \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \ (i = 1, \cdots n)$$

この式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\
&= \sum \{x_i^2 - 2x_i E(x) + (E(x))^2\} P(x_i) \\
&= \sum \{x_i^2 P(x_i) - 2x_i E(x) P(x_i) + (E(x))^2 P(x_i)\} \\
&= \sum x_i^2 P(x_i) - \sum 2x_i E(x) P(x_i) + \sum (E(x))^2 P(x_i) \qquad (\textstyle\sum (Y_i + Z_i) = \sum Y_i + \sum Z_i \text{より}) \\
&= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x) \sum x_i P(x_i) + (E(x))^2 \sum P(x_i) \qquad (\textstyle\sum aY_i = a \sum Y_i \text{より}) \\
&= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x)E(x) + (E(x))^2 \qquad (\textstyle\sum x_i P(x_i) = E(x), \sum P(x_i) = 1 \text{ より}) \\
&= \sum x_i^2 P(x_i) - 2(E(x))^2 + (E(x))^2 \\
&= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2
\end{aligned}$$

例　サイコロを 3 回ふり、1 の目が出た回数を x とする例において、定義式と計算式で分散を計算してみる。なお、$E(x) = \frac{1}{2}$ が既に求められているものとする。

定義式による計算

$$\begin{aligned}
V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\
&= (0 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{125}{216} + (1 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{75}{216} + (2 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{15}{216} + (3 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{216} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{125}{216} + \frac{1}{4} \times \frac{75}{216} + \frac{9}{4} \times \frac{15}{216} + \frac{25}{4} \times \frac{1}{216} \\
&= \frac{125}{864} + \frac{75}{864} + \frac{135}{864} + \frac{25}{864} = \frac{360}{864} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

計算式による計算

$$\begin{aligned}
V(x) &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \\
&= 0^2 \times \frac{125}{216} + 1^2 \times \frac{75}{216} + 2^2 \times \frac{15}{216} + 3^2 \times \frac{1}{216} - (\frac{1}{2})^2 \\
&= 0 + \frac{75}{216} + \frac{60}{216} + \frac{9}{216} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{144}{216} - \frac{1}{4} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$