

統計学 補助資料

－ 期待値記号と分散記号の計算 －

河田 正樹

2010 年 6 月 17 日

以下において、 x は変数、 a は定数であるとする。

1 期待値記号の計算

- $E(x + a) = E(x) + a$
- $E(x - a) = E(x) - a$
- $E(ax) = aE(x)$
- $E\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{E(x)}{a}$

簡単な例 $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4$ であり、 $a = 2$ であるとする。

$$E(x) = \frac{3 + 2 + 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- $E(x + a) = \frac{(3 + 2) + (2 + 2) + (4 + 2)}{3} = 5 = 3 + 2 = E(x) + a$
- $E(x - a) = \frac{(3 - 2) + (2 - 2) + (4 - 2)}{3} = 1 = 3 - 2 = E(x) - a$
- $E(ax) = \frac{2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 4}{3} = 6 = 2 \times 3 = aE(x)$
- $E\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2}}{3} = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{E(x)}{a}$

証明

- $E(x + a) = \frac{\sum (x_i + a)}{n} = \frac{\sum x_i + na}{n} = \frac{\sum x_i}{n} + \frac{na}{n} = E(x) + a$
- $E(x - a) = \frac{\sum (x_i - a)}{n} = \frac{\sum x_i - na}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \frac{na}{n} = E(x) - a$
- $E(ax) = \frac{\sum (ax_i)}{n} = \frac{a \sum x_i}{n} = aE(x)$
- $E\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sum \left(\frac{x_i}{a}\right)}{n} = \frac{\sum x_i}{na} = \frac{\sum x_i}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{E(x)}{a}$

2 分散記号の計算

- $V(x+a) = V(x)$
- $V(x-a) = V(x)$
- $V(ax) = a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a}) = \frac{V(x)}{a^2}$

簡単な例 $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4$ であり、 $a = 2$ であるとする。

$$V(x) = \frac{(3-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

- $V(x+a) = \frac{(3+2-5)^2 + (2+2-5)^2 + (4+2-5)^2}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$
- $V(x-a) = \frac{(3-2-1)^2 + (2-2-1)^2 + (4-2-1)^2}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$
- $V(ax) = \frac{(2 \times 3 - 2 \times 3)^2 + (2 \times 2 - 2 \times 3)^2 + (2 \times 4 - 2 \times 3)^2}{3} = \frac{0+4+4}{3} = \frac{8}{3} = 4 \times \frac{2}{3}$
 $= a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a}) = \frac{(\frac{3}{2} - \frac{3}{2})^2 + (\frac{2}{2} - \frac{3}{2})^2 + (\frac{4}{2} - \frac{3}{2})^2}{3} = \frac{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{V(x)}{a^2}$

証明

- $V(x+a) = \frac{\sum \{(x_i + a) - (E(x) + a)\}^2}{n} = \frac{\sum (x_i - E(x))^2}{n} = V(x)$
- $V(x-a) = \frac{\sum \{(x_i - a) - (E(x) - a)\}^2}{n} = \frac{\sum (x_i - E(x))^2}{n} = V(x)$
- $V(ax) = \frac{\sum (ax_i - aE(x))^2}{n} = \frac{\sum a^2(x_i - E(x))^2}{n} = \frac{a^2 \sum (x_i - E(x))^2}{n} = a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a}) = \frac{\sum (\frac{x_i}{a} - \frac{E(x)}{a})^2}{n} = \frac{\sum \frac{(x_i - E(x))^2}{a^2}}{n} = \frac{\sum (x_i - E(x))^2}{a^2 n} = \frac{V(x)}{a^2}$