

統計学 補助資料 – 確率変数の分散 –

担当: 河田

2009年5月12日

確率変数 x の分散は

$$V(x) = \sum (x - E(x))^2 P(x) \quad (\text{定義式})$$

であるが、実際の計算のときには

$$V(x) = \sum x^2 P(x) - (E(x))^2 \quad (\text{計算式})$$

という式を用いた方が計算が簡単である。

証明 定義式は正確に書くと次のように書ける。

$$V(x) = \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

この式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\ &= \sum \{x_i^2 - 2x_i E(x) + (E(x))^2\} P(x_i) \\ &= \sum \{x_i^2 P(x_i) - 2x_i E(x) P(x_i) + (E(x))^2 P(x_i)\} \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - \sum 2x_i E(x) P(x_i) + \sum (E(x))^2 P(x_i) \quad (\sum (Y_i + Z_i) = \sum Y_i + \sum Z_i \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x) \sum x_i P(x_i) + (E(x))^2 \sum P(x_i) \quad (\sum aY_i = a \sum Y_i \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2E(x)E(x) + (E(x))^2 \quad (\sum x_i P(x_i) = E(x), \sum P(x_i) = 1 \text{より}) \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - 2(E(x))^2 + (E(x))^2 \\ &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \end{aligned}$$

例 サイコロを3回ふり、1の目が出た回数を x とする例において、定義式と計算式で分散を計算してみる。なお、 $E(x) = \frac{1}{2}$ が既に求められているものとする。

定義式による計算

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i) \\ &= (0 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{125}{216} + (1 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{75}{216} + (2 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{15}{216} + (3 - \frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{125}{216} + \frac{1}{4} \times \frac{75}{216} + \frac{9}{4} \times \frac{15}{216} + \frac{25}{4} \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{125}{864} + \frac{75}{864} + \frac{135}{864} + \frac{25}{864} = \frac{360}{864} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

計算式による計算

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 \\ &= 0^2 \times \frac{125}{216} + 1^2 \times \frac{75}{216} + 2^2 \times \frac{15}{216} + 3^2 \times \frac{1}{216} - (\frac{1}{2})^2 \\ &= 0 + \frac{75}{216} + \frac{60}{216} + \frac{9}{216} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{144}{216} - \frac{1}{4} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$