計量経済学 参考資料
– 最小2乗パラメータ推定値の導出(3変数の場合) –

河田 正樹

2009 年 11 月 17 日

1　3変数の場合

説明変数が 2 つの重回帰モデル

$$Y_i = a + bX_i + cW_i + u_i$$

の回帰係数 (パラメータともいう) の推定値は、実績値 (Y_i) から予測値 $(\hat{Y}_i)$ を引いた残差 e_i の 2 乗和を最小にするような $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ である。

残差の 2 乗和 (これを G とあらわす) は、

$$G = (Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1)^2 + (Y_2 - \hat{a} - \hat{b}X_2 - \hat{c}W_2)^2 + \cdots + (Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)^2$$

となる。この G を $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ でそれぞれ偏微分し、0 に等しいとおいた解の $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ が、求める推定値である。

残差平方和 G を $\hat{a}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{a}} &= -2(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + (Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \qquad (1) \end{aligned}$$

G を $\hat{b}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{b}} &= -2X_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2X_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{X_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + X_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \qquad (2) \end{aligned}$$

G を $\hat{c}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{c}} &= -2W_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2W_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{W_1(Y_1 - \hat{a} - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + W_n(Y_n - \hat{a} - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \qquad (3) \end{aligned}$$

となる。

(1) 式の {} 内を $= 0$ とし、 $\hat{a}$ の項と X_i の項を右辺に移行すると、

$$Y_1 + \cdots + Y_n = n\hat{a} + \hat{b}(X_1 + \cdots + X_n) + \hat{c}(W_1 + \cdots + W_n) \qquad (4)$$

(2) 式の {} 内を $= 0$ とし、展開した X_i の項と X_i^2 の項と X_iW_i の項を右辺に移行すると、

$$X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n = \hat{a}(X_1 + \cdots + X_n) + \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_1W_n) \qquad (5)$$

(3) 式の {} 内を $= 0$ とし、展開した X_i の項と X_iW_i の項と W_i^2 の項を右辺に移行すると、

$$W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n = \hat{a}(W_1 + \cdots + W_n) + \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \qquad (6)$$

となる。この (4)(5)(6) 式が正規方程式である。

(4) 式を $\hat{a}$ について解くと

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} - \hat{b}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \hat{c}\frac{W_1+\cdots+W_n}{n} \\ &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W} \qquad (7)\end{aligned}$$

これを (5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}X_1Y_1+\cdots+X_nY_n &= (\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}-\hat{c}\bar{W})(X_1+\cdots+X_n) + \hat{b}(X_1^2+\cdots+X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1+\cdots+X_1W_n) \\ X_1Y_1+\cdots+X_nY_n - n\bar{X}\bar{Y} &= \hat{b}\{(X_1^2+\cdots+X_n^2) - n\bar{X}^2\} + \hat{c}\{(X_1W_1+\cdots+X_1W_n) - n\bar{X}\bar{W}\} \\ S_{xy} &= \hat{b}S_x^2 + \hat{c}S_{xw} \qquad (8)\end{aligned}$$

また (6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}W_1Y_1+\cdots+W_nY_n &= (\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}-\hat{c}\bar{W})(W_1+\cdots+W_n) + \hat{b}(X_1W_1+\cdots+X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2+\cdots+W_n^2) \\ W_1Y_1+\cdots+W_nY_n - n\bar{W}\bar{Y} &= \hat{b}\{(X_1W_1+\cdots+X_nW_n) - n\bar{X}\bar{W}\} + \hat{c}\{(W_1^2+\cdots+W_n^2) - n\bar{W}^2\} \\ S_{wy} &= \hat{b}S_{xw} + \hat{c}S_w^2 \qquad (9)\end{aligned}$$

(8) 式に S_{xw} をかけたものと、(9) 式に S_x^2 をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned}S_{xy}S_{xw} &= \hat{b}S_x^2S_{xw} + \hat{c}(S_{xw})^2 \qquad (10) \\ S_x^2S_{wy} &= \hat{b}S_x^2S_{xw} + \hat{c}S_x^2S_w^2 \qquad (11)\end{aligned}$$

(11) 式から (10) 式を引くと

$$S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw} = \hat{c}(S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2)$$

となる。よって $\hat{c}$ は

$$\hat{c} = \frac{S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \qquad (12)$$

また、(8) 式に S_w^2 をかけたものと、(9) 式に S_{xw} をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned}S_{xy}S_w^2 &= \hat{b}S_x^2S_w^2 + \hat{c}S_{xw}S_w^2 \qquad (13) \\ S_{xw}S_{wy} &= \hat{b}(S_{xw})^2 + \hat{c}S_{xw}S_w^2 \qquad (14)\end{aligned}$$

(13) 式から (14) 式を引くと

$$S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy} = \hat{b}(S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2)$$

となる。よって $\hat{b}$ は

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \qquad (15)$$

となる。

よって、(7)(15)(12) 式をまとめて、

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{W} \\ \hat{b} &= \frac{S_{xy}S_w^2 - S_{xw}S_{wy}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2} \\ \hat{c} &= \frac{S_x^2S_{wy} - S_{xy}S_{xw}}{S_x^2S_w^2 - (S_{xw})^2}\end{aligned}$$

が 3 変数の場合のパラメータ推定値となる。

2　回帰平面が原点を通るケース

説明変数が 2 つの重回帰モデルの特殊ケースとして、回帰平面が原点を通るケースを考えよう。モデルは

$$Y_i = bX_i + cW_i + u_i$$

となる。このモデルの回帰係数 (パラメータともいう) の推定値は、実績値 (Y_i) から予測値 $(\hat{Y_i})$ を引いた残差 e_i の 2 乗和を最小にするような $\hat{b}, \hat{c}$ である。

残差の 2 乗和 (これを G とあらわす) は、

$$G = (Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1)^2 + (Y_2 - \hat{b}X_2 - \hat{c}W_2)^2 + \cdots + (Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)^2$$

となる。この G を $\hat{b}, \hat{c}$ でそれぞれ偏微分し、0 に等しいとおいた解の $\hat{b}, \hat{c}$ が、求める推定値である。

残差 2 乗和 G を $\hat{b}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{b}} &= -2X_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2X_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{X_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + X_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \tag{16}$$

G を $\hat{c}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{c}} &= -2W_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) - \cdots - 2W_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n) \\ &= -2\{W_1(Y_1 - \hat{b}X_1 - \hat{c}W_1) + \cdots + W_n(Y_n - \hat{b}X_n - \hat{c}W_n)\} \end{aligned} \tag{17}$$

(16) 式の $\{\}$ 内を $=0$ とし、展開した X_i^2 の項と X_iW_i の項を右辺に移行すると、

$$X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n = \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_1W_n) \tag{18}$$

(17) 式の $\{\}$ 内を $=0$ とし、展開した X_iW_i の項と W_i^2 の項を右辺に移行すると、

$$W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n = \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \tag{19}$$

となる。この (18)(19) 式が正規方程式である。

(18) 式に $(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)$ をかけたものと、(19) 式に $(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned} &(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n) \\ &\quad = \hat{b}(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1^2 + \cdots + X_n^2) + \hat{c}(X_1W_1 + \cdots + X_1W_n)^2 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) \\ &\quad = \hat{b}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(X_1W_1 + \cdots + X_nW_n) + \hat{c}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) \end{aligned} \tag{21}$$

(21) 式から (20) 式を引くと

$$\begin{aligned} &(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n) \\ &\quad = \hat{c}\{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)^2\} \end{aligned}$$

となる。よって $\hat{c}$ は

$$\hat{c} = \frac{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1Y_1 + \cdots + W_nY_n) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)(X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)(W_1^2 + \cdots + W_n^2) - (X_1W_1 + \cdots + X_nW_n)^2} \tag{22}$$

また (18) 式に $(W_1^2+\cdots+W_n^2)$ をかけたものと、(19) 式に $(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)$ をかけたものを比べると、

$$\begin{aligned}&(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1Y_1+\cdots+X_nY_n)\\&\quad=\hat{b}(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1^2+\cdots+X_n^2)+\hat{c}(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1W_1+\cdots+X_1W_n)\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(W_1Y_1+\cdots+W_nY_n)\\&\quad=\hat{b}(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)^2+\hat{c}(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(W_1^2+\cdots+W_n^2)\end{aligned}\tag{24}$$

(23) 式から (24) 式を引くと

$$\begin{aligned}&(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1Y_1+\cdots+X_nY_n)-(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(W_1Y_1+\cdots+W_nY_n)\\&\quad=\hat{b}\{(X_1^2+\cdots+X_n^2)(W_1^2+\cdots+W_n^2)-(X_1W_1+\cdots+X_1W_n)^2\}\end{aligned}$$

となる。よって $\hat{b}$ は

$$\hat{b}=\frac{(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1Y_1+\cdots+X_nY_n)-(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(W_1Y_1+\cdots+W_nY_n)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2)(W_1^2+\cdots+W_n^2)-(X_1W_1+\cdots+X_1W_n)^2}\tag{25}$$

となる。

よって、(25)(22) 式をまとめて、

$$\begin{aligned}\hat{b}&=\frac{(W_1^2+\cdots+W_n^2)(X_1Y_1+\cdots+X_nY_n)-(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(W_1Y_1+\cdots+W_nY_n)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2)(W_1^2+\cdots+W_n^2)-(X_1W_1+\cdots+X_1W_n)^2}\\\hat{c}&=\frac{(X_1^2+\cdots+X_n^2)(W_1Y_1+\cdots+W_nY_n)-(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)(X_1Y_1+\cdots+X_nY_n)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2)(W_1^2+\cdots+W_n^2)-(X_1W_1+\cdots+X_nW_n)^2}\end{aligned}$$

が回帰平面が原点を通る場合のパラメータ推定値となる。