統計学 補助資料
– 期待値記号と分散記号の計算 –

河田 正樹

2007 年 6 月 18 日

以下において、x は変数、 a は定数であるとする。

1 期待値記号の計算

- $E(x+a) = E(x) + a$
- $E(x-a) = E(x) - a$
- $E(ax) = aE(x)$
- $E(\frac{x}{a}) = \frac{E(x)}{a}$

簡単な例 $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4$ であり、$a = 2$ であるとする。

$$E(x) = \frac{3+2+4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- $E(x+a) = \frac{(3+2)+(2+2)+(4+2)}{3} = 5 = 3+2 = E(x) + a$
- $E(x-a) = \frac{(3-2)+(2-2)+(4-2)}{3} = 1 = 3-2 = E(x) - a$
- $E(ax) = \frac{2\times 3 + 2\times 2 + 2\times 4}{3} = 6 = 2\times 3 = aE(x)$
- $E(\frac{x}{a}) = \frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}+\frac{4}{2}}{3} = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{E(x)}{a}$

証明

- $E(x+a) = \frac{\sum(x_i+a)}{n} = \frac{\sum x_i + na}{n} = \frac{\sum x_i}{n} + \frac{na}{n} = E(x) + a$
- $E(x-a) = \frac{\sum(x_i-a)}{n} = \frac{\sum x_i - na}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \frac{na}{n} = E(x) - a$
- $E(ax) = \frac{\sum(ax_i)}{n} = \frac{a\sum x_i}{n} = aE(x)$
- $E(\frac{x}{a}) = \frac{\sum(\frac{x_i}{a})}{n} = \frac{\frac{\sum x_i}{a}}{n} = \frac{\sum x_i}{na} = \frac{\frac{\sum x_i}{n}}{a} = \frac{E(x)}{a}$

2　分散記号の計算

- $V(x+a)=V(x)$
- $V(x-a)=V(x)$
- $V(ax)=a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a})=\frac{V(x)}{a^2}$

簡単な例　$x_1=3, x_2=2, x_3=4$ であり、$a=2$ であるとする。

$$V(x)=\frac{(3-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2}{3}=\frac{0+1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

- $V(x+a)=\frac{(3+2-5)^2+(2+2-5)^2+(4+2-5)^2}{3}=\frac{0+1+1}{3}=\frac{2}{3}$
- $V(x-a)=\frac{(3-2-1)^2+(2-2-1)^2+(4-2-1)^2}{3}=\frac{0+1+1}{3}=\frac{2}{3}$
- $V(ax)=\frac{(2\times 3-2\times 3)^2+(2\times 2-2\times 3)^2+(2\times 4-2\times 3)^2}{3}=\frac{0+4+4}{3}=\frac{8}{3}=4\times\frac{2}{3}$
  $=a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a})=\frac{(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})^2+(\frac{2}{2}-\frac{3}{2})^2+(\frac{4}{2}-\frac{3}{2})^2}{3}=\frac{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{6}=\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{V(x)}{a^2}$

証明

- $V(x+a)=\frac{\sum\{(x_i+a)-(E(x)+a)\}^2}{n}=\frac{\sum(x_i-E(x))^2}{n}=V(x)$
- $V(x-a)=\frac{\sum\{(x_i-a)-(E(x)-a)\}^2}{n}=\frac{\sum(x_i-E(x))^2}{n}=V(x)$
- $V(ax)=\frac{\sum(ax_i-aE(x))^2}{n}=\frac{\sum a^2(x_i-E(x))^2}{n}=\frac{a^2\sum(x_i-E(x))^2}{n}=a^2V(x)$
- $V(\frac{x}{a})=\frac{\sum(\frac{x_i}{a}-\frac{E(x)}{a})^2}{n}=\frac{\sum\frac{(x_i-E(x))^2}{a^2}}{n}=\frac{\frac{\sum(x_i-E(x))^2}{a^2}}{n}=\frac{\sum(x_i-E(x))^2}{a^2n}=\frac{V(x)}{a^2}$