

# 統計学 練習問題

## 第6回 確率と確率分布 (3) 問2 解説

2006年5月9日

問2 あるテレビのゲーム番組では、参加者は3つのドア(左からドアA, ドアB, ドアCとする)のいずれかを選び、その後ろにある商品を手に入れることができる。ひとつのドアの後ろには車が、残り2つのドアの後ろにはたわしが置いてある。

参加者がドアAを選んだとする。このとき、ドアの後ろに何が置いてあるか知っている司会者はドアCを開けて参加者にこう言った「ドアBに変えますか?」参加者はドアBに変えたほうが良いのであろうか。

(解) 司会者は必ずたわしのドアを開けるものとする

車の場所 ドアAの後ろ  $X_1$  ドアBの後ろ  $X_2$  ドアCの後ろ  $X_3$

司会者の開けるドア ドアA  $Y_1$  ドアB  $Y_2$  ドアC  $Y_3$

とする。

$P(X_1|Y_3)$ (ドアを変えない方が良い) と  $P(X_2|Y_3)$ (ドアを変えた方が良い) の比較となる。

車がどのドアの後ろにあるかは等確率とする。すなわち、 $P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}$

ドアAの後ろに車があるとき、司会者はドアBドアCのいずれかのドアをあける。これを等確率で開けるものとする

$$P(Y_1|X_1) = 0, P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = \frac{1}{2}$$

ドアBの後ろに車があるとき、司会者はドアCをあける。

$$P(Y_1|X_2) = P(Y_2|X_2) = 0, P(Y_3|X_2) = 1$$

ドアCの後ろに車があるとき、司会者はドアBをあける。

$$P(Y_1|X_3) = P(Y_3|X_3) = 0, P(Y_2|X_3) = 1$$

ベイズの定理を用いて  $P(X_1|Y_3)$  と  $P(X_2|Y_3)$  を計算する。

$$\begin{aligned} P(X_1|Y_3) &= \frac{P(X_1) \times P(Y_3|X_1)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2|Y_3) &= \frac{P(X_2) \times P(Y_3|X_2)}{P(X_1) \times P(Y_3|X_1) + P(X_2) \times P(Y_3|X_2) + P(X_3) \times P(Y_3|X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$P(X_1|Y_3) < P(X_2|Y_3)$  となることから、参加者はドアを変えた方が良い。